

Aportes para el análisis
Evaluación formativa en línea

Área matemática



Agosto 2021



ANEP

CONSEJO
DIRECTIVO
CENTRAL

DIRECCIÓN EJECUTIVA
DE POLÍTICAS
EDUCATIVAS

DIRECCIÓN SECTORIAL
DE PLANIFICACIÓN
EDUCATIVA

Aportes para el análisis
Evaluación formativa en línea

Área matemática

Agosto 2021

REDACTORES RESPONSABLES

Andrea Facal, Marlene Fernández, Teresa Pérez, Isabel Regalado y Magdalena Romano.



ANEP

CONSEJO
DIRECTIVO
CENTRAL

DIRECCIÓN EJECUTIVA
DE POLÍTICAS
EDUCATIVAS

DIRECCIÓN SECTORIAL
DE PLANIFICACIÓN
EDUCATIVA

División de Investigación,
Evaluación
y Estadística

Departamento
de Evaluación
de Aprendizajes



Contenido

1. Introducción.....	7
2. Las pruebas.....	9
3. Reconocer propiedades de las figuras para clasificar, explicar, comunicar y argumentar.....	13
3.1. ¿Cuál es el intruso?	15
3.2. Tangram	18
3.3. Triángulos en el geoplano	21
4. Resolver situaciones en el campo de los números naturales asociadas a divisibilidad, conteo y reconocimiento de regularidades	27
4.1. Pintando el rectángulo.....	29
4.2. Rectángulo con cuadrados.....	37
5. Referencias bibliográficas	45



1. Introducción

La propuesta formativa 2021 mantiene dos características importantes del ciclo anterior. La primera, en cuanto a la estructura de cuatro módulos de pruebas: lectura, matemática, ciencias naturales y multiárea, con 10 actividades cada uno. La segunda es que junto con las pruebas de cada área se disponibilizan documentos con aportes para el análisis. Estos documentos tienen como propósito aportar elementos para optimizar las instancias de retroalimentación.

Como novedad para este ciclo se incorporaron en la plataforma SEA dos nuevos formatos de ítem: de *selección múltiple* y de *completar espacios*. Los ítems de *selección múltiple* habilitan al estudiante a elegir más de una alternativa. Estas propuestas, al igual que los ítems de múltiple opción con una única respuesta correcta entre las alternativas, se corrigen automáticamente en la plataforma a partir de una rúbrica precargada que adjudica los créditos. El nuevo formato de *completar espacios* permite pautar la respuesta del niño cuando implica, por ejemplo, seleccionar una alternativa y justificarla o responder sí o no y argumentar su elección. Este formato, al igual que el de ítems abiertos de desarrollo, es acompañado de una rúbrica que permite a los docentes corregir las respuestas de sus estudiantes de una manera ágil y práctica. Por lo tanto, este ciclo 2021 contará con ítems de cuatro formatos diferentes.

Se entiende que cuatro módulos cortos, de 10 actividades cada uno, fortalecen el carácter formativo de la evaluación al favorecer instancias de retroalimentación inmediatas a la aplicación. Esto supone al menos tres ventajas: el esfuerzo por generar las condiciones de aplicación (dispositivos y conectividad para cada estudiante) se aprovecha para la devolución inmediata; el estudiante recibe una devolución sobre algo que acaba de hacer, esta inmediatez habilita procesos metacognitivos liderados por el docente; y el docente optimiza los tiempos dedicados a analizar las respuestas de los estudiantes frente a cada actividad al mismo tiempo que puede proponer estrategias de debate grupal u otras situadas en su contexto. Por otra parte, las actividades seleccionadas para la prueba entre los equipos técnicos de evaluación, los supervisores y los formadores, dan cuenta de una focalización temática.

Finalmente, vale recordar que todas las actividades propuestas están alineadas al **Programa de Educación Inicial y Primaria** y al **Documento Base de Análisis Curricular**. Asimismo, estas pruebas no están diseñadas para informar sobre cuánto saben los estudiantes de un grado en particular sobre un área determinada, sino que apuntan a habilitar el acontecimiento de intervenciones pedagógicas oportunas en los centros escolares. Es el docente, o el colectivo docente quienes deciden qué estrategias didácticas ponen en juego a partir de las propuestas de las pruebas y de las especificaciones de los documentos asociados de cada módulo.

2. Las pruebas

A partir de reuniones de trabajo desarrolladas a fines del 2020 entre los técnicos del Departamento de Evaluación de Aprendizajes de la DIEE del Área Matemática con inspectores designados por Inspección Técnica del CEIP, así como de representantes del Instituto de formación en servicio del CEIP y de PAEPU, se definieron los énfasis de las pruebas formativas de para el ciclo 2021:

- Reconocer propiedades de las figuras para clasificar, explicar, comunicar y argumentar.
- Resolver situaciones en el campo de los números naturales asociadas a divisibilidad, conteo y reconocimiento de regularidades.

En los siguientes apartados de este documento se analizarán varias actividades que pretenden ejemplificar cada uno de estos énfasis definidos. A su vez, pretenden ayudar a la reflexión sobre el alcance de las propuestas en su aspecto formativo y algunas de las múltiples posibilidades de procedimientos y razonamientos que pueden poner en práctica los niños al aceptar el desafío de resolver las actividades.

En lo que refiere a la estructura de las pruebas, en esta edición las propuestas de matemática incluyen dos actividades transversales, incluidas en las pruebas de todos los grados, dos ítems comunes a las pruebas de 3° y 4° grado y otros dos a las de 5° y 6° grado. Se diseñaron cuatro ítems haciendo uso del nuevo formato de *selección múltiple* disponible en la plataforma SEA. Las dos actividades transversales son de respuesta abierta, una de ellas se presenta en el formato de *completar espacios* en blanco. Se entiende que este formato organiza la respuesta y favorece a que los niños respondan en forma completa lo que se pregunta.

Al igual que en el ciclo anterior, algunas actividades incluyen applets que posibilitan la exploración, permiten al niño experimentar, indagar y razonar apoyándose en la manipulación de piezas, hacer y deshacer, para luego seleccionar o elaborar su respuesta.

A su vez, varios de los ítems incluidos en esta edición de las pruebas formativas del área comparten un mismo estímulo o usan un mismo recurso para generar distintas preguntas. En algunos casos se proponen para todos los cursos con el fin de observar ganancia de habilidad a lo largo de la escolaridad y en otros casos se generaron a partir del mismo recurso propuestas que atienden a las particularidades del curso en que se proponen. Son ejemplo de ello las series de *Tangram*, *Pintando el rectángulo*, *Rectángulo con cuadrados* y *Collares*, por citar algunas.

Es importante resaltar, en primer lugar, que más allá de que el niño llegue a la respuesta correcta interesa obtener información sobre el grado de conceptualización en que está. La selección de una alternativa que no sea la correcta puede dar indicios de estar en camino de incorporación del concepto en cuestión así como evidenciar ideas previas, preconceptos o errores persistentes. A su vez, las actividades diseñadas van en la misma línea de estrategias que plantea el Libro para el maestro. Matemática en el primer ciclo de la CACEEM (2016, p. 12) ya que *“algunos de los problemas presentados tendrán por objeto habilitar la exploración, es decir, permitir ensayar diversos caminos para llegar a una solución. Aunque esta solución pueda ser a veces errónea o incompleta, posibilitará la aparición de las concepciones de los alumnos que manifiestan un estado de conocimiento”*.

En segundo lugar, que la riqueza del aporte de esta propuesta para el trabajo de maestro surgirá de la sinergia entre la información que proporciona en forma inmediata la plataforma y la indagación que éste pueda realizar cuando retoma la actividad en el aula. Instancias en que se habilite a los niños a explicitar sus estrategias de resolución, el porqué de sus respuestas y de los razonamientos que los llevaron a ellas así como presentar posibles reformulaciones de las propuestas originales y re aplicaciones en momentos que se crean oportunos según la planificación realizada. Hay actividades que pueden ser particularmente valiosas al retomarlas en el aula, ya que poner en común soluciones, estrategias de resolución, reflexiones y conclusiones, invita a los alumnos a hablar, a hacer matemática y construir conocimientos a partir de los diálogos que surjan ya que tal como plantea Sadovsky (s/f, p.116) "...lograr que los niños expliquen, que encaden deductivamente sentencias para validar el trabajo que van realizando- será el resultado de invitarlos a participar de manera sostenida de un escenario en el que explicar sea una práctica cotidiana. Un escenario en el que la actividad matemática misma sea el objeto de enseñanza".

A continuación se presenta el listado de ítems por grado donde se visualizan las actividades transversales y las comunes a más de un grado con su objetivo.

Orden en la prueba	Grado escolar			
	3ero	4to	5to	6to
1	MAT2905 <u>Collares_patrón 6</u>	MAT2909 Tangram_ángulo recto	MAT2956 Rectángulo con cuadrados_operación	MAT2956 Rectángulo con cuadrados_operación
2	MAT 2920 <u>Collares y pulseras</u>	MAT 2895 Tangram_ legajos	MAT2947 ¿Cuál es el intruso?_ figuras 1	MAT 2952 Rectángulo con cuadrados_¿cuántos?
3	MAT2938 Descartando figuras 2	MAT2924 Tangram_diseño	MAT2922 Tangram_ equicomposición	MAT2947 ¿Cuál es el intruso?_ figuras 1
4	MAT2947 ¿Cuál es el intruso?_ figuras 1	MAT2916 Áreas_dos triángulos	MAT2942 Tangram_igual área	MAT2945 Geoplano ¿cuántos isósceles?
5	MAT 2894 Tangram_ figuras	MAT2938 Descartando figuras 2	MAT2910 Areas_ triángulo y paralelogramo	MAT2910 Areas_ triángulo y paralelogramo
6	MAT2924 Tangram_diseño	MAT2947 ¿Cuál es el intruso?_ figuras 1	MAT2945 Geoplano ¿cuántos isósceles?	MAT2896 Cardiotangram
7	MAT2949 Pintando el rectángulo_ posibilidades	MAT 2943 Cuál es el intruso_ números	MAT2946 Geoplano_ característica de los triángulos	MAT2907 Cardiotangram_ construcción
8	MAT 2948 Rectángulo con cuadrados_número	MAT2949 Pintando el rectángulo_ posibilidades	MAT2949 Pintando el rectángulo_ posibilidades	MAT2949 Pintando el rectángulo_ posibilidades
9	MAT2915 <u>Guarda siguiente</u>	MAT 2948 Rectángulo con cuadrados_número	MAT2950 Pintando el rectángulo_ división	MAT2913 Laberinto_serie
10	MAT 2919 <u>Guarda ropero</u>	MAT2904 <u>Collares_color 1</u>	MAT2906 <u>Collares_color 2</u>	MAT2917 Leyendo

Referencias ● Ítems transversales ● Ítems comunes a 3° y 4° año ● Ítems comunes a 5° y 6° año

La siguiente tabla incluye los links asociados a las actividades interactivas que el docente puede utilizar en la instancia de retroalimentación o para generar nuevas actividades.

Ítem	Link al applet
MAT 2921 Descartando figuras	https://www.geogebra.org/m/mxpuxdqn
MAT 2945 Geoplano ¿cuántos isósceles?	https://www.geogebra.org/m/nxqw7xwz
MAT2946 Geoplano_característica de los triángulos	https://www.geogebra.org/m/kb6mm9rw
MAT 2922 Tangram_equicomposición	https://www.geogebra.org/m/mtxszbxq
MAT 2907 Cardiotangram_construcción	https://www.geogebra.org/m/tww8qvb9
MAT 2949 Pintando el rectángulo_posibilidades	https://www.geogebra.org/m/pa4wjthm
MAT 2948 Rectángulo con cuadrados_número	https://www.geogebra.org/m/arjswp69
MAT 2956 Rectángulo con cuadrados_operación	
MAT 2952 Rectángulo con cuadrados_¿cuántos?	



3. Reconocer propiedades de las figuras para clasificar, explicar, comunicar y argumentar.

Teniendo en cuenta el marco curricular vigente, a través del Programa de educación inicial y primaria (2008), en referencia a la importancia de plantear problemas geométricos que pongan en juego propiedades de las figuras y sus relaciones, se decidió en esta edición de las pruebas formativas, poner énfasis en actividades que apuntan al *reconocimiento de propiedades de figuras* para resolver distintas situaciones, en particular aquellas donde el estudiante tenga que *clasificar, comunicar sus procedimientos o razonamientos, argumentar o explicar*.

Con el horizonte en éste énfasis el espíritu que guió el diseño de los ítems está en concordancia con lo que plantea Itzcovich (2014, p.169):

El estudio de las propiedades de las figuras y de los cuerpos geométricos implica mucho más que reconocerlos perceptivamente y saber sus nombres. Implica tenerlos disponibles a fin de poder recurrir a ellos para resolver distintos tipos de situaciones, así como utilizarlos para identificar nuevas propiedades sobre las figuras. En ambos casos, dichas propiedades permitirán dar cuenta de la validez de lo que se va produciendo.

Este apartado del documento de aportes se centra en el análisis de algunas actividades asociadas con situaciones relacionadas al proceso “clasificar” o que pretenden dar insumos para el trabajo con clasificación de figuras.

Para comenzar, es importante señalar algunos aspectos que están “detrás” del proceso de clasificar. Como sostienen Fripp y Varela (2012, p.65), “proceder a clasificar figuras geométricas activa en los estudiantes la explicitación de atributos comunes, los hace pensar en lo que les es común a ciertas figuras y a su vez lo que las diferencia de otras”. Esto requiere por parte del estudiante el establecimiento de relaciones interfigurales, comparando figuras y estableciendo relaciones entre los elementos de esas figuras. Es así que en el Documento Base de Análisis Curricular (2016), se explicitan perfiles de egreso, tanto de tercer año como de sexto año, estrechamente vinculados con las actividades de clasificación: *Identificar propiedades comunes y no comunes en la comparación de figuras (3.º); y Describir, comparar y clasificar figuras en función de distintas propiedades y representaciones e Identificar propiedades comunes a distintas figuras (6.º)*. En la misma línea la CACEEM, en el Libro para el maestro de segundo ciclo expresa: “... se pretende favorecer la construcción de diferentes clasificaciones de figuras que exigen el establecimiento de relaciones interfigurales. El alumno debe ser el artífice de dichos agrupamientos con figuras del plano y del espacio que responden a relaciones entre los elementos de distintas figuras —caras, bases, aristas laterales, alturas, paralelas medias, diagonales, número de lados del polígono de la base con el número de caras, entre otros—...” (ANEP, 2017, p. 94)

En referencia a los agrupamientos o clasificaciones se pueden distinguir, como mencionan Fripp y Varela (2012), clasificaciones no inclusivas o inclusivas. En el caso de las primeras, los grupos no pueden tener ningún elemento en común, por ejemplo, poliedros y no poliedros, triángulos y cuadriláteros, etc., esto ocurre necesariamente cuando se clasifican figuras según cumplen con una determinada propiedad o no. En estos casos, los criterios de clasificación pueden ser variados: algunos de ellos cuantitativos

(número de lados, de vértices, de aristas, etc) y otros no (tiene diagonales, tiene ángulos rectos, tiene pares de lados paralelos, todos sus lados son iguales, etc.). En caso de las clasificaciones inclusivas, puede ocurrir que alguno de los conjuntos esté incluido en otro más general, por ejemplo, al clasificar triángulos por sus lados, el conjunto de los triángulos equiláteros está incluido en el conjunto de los triángulos isósceles.

Cabe señalar que las tareas de clasificación se plantean desde nivel inicial y a medida que se avanza en la escolaridad se van ampliando los criterios de clasificación así como las propiedades de las figuras que se utilizan como criterio.

En los Cuadernos de hacer matemática de la CACCEM también se incluyen algunas actividades que se enmarcan en la comparación, agrupación y clasificación de figuras o en el reconocimiento de características comunes y no comunes de las figuras como paso previo a esas tareas. Es el caso de la actividad *Adivinanzas para la Kermese* del Cuaderno para hacer matemática en tercero (p.30) que consiste en asociar una figura a un conjunto de características. También, y solo por mencionar un par de ejemplos, *Triángulos, triángulos, triángulos...* del Cuaderno para hacer matemática en cuarto (p.12) en la que el niño tiene que reconocer una característica de un triángulo, seleccionado entre los de un conjunto dado y así como de la variante de esta actividad presentada en el Libro para el maestro de segundo ciclo (p. 99). Esta última propuesta plantea preguntas como: ¿tiene un ángulo recto?, ¿sus lados son todos iguales?, ¿tiene un ángulo obtuso? Que permiten clasificar por varios criterios simultáneamente.

A continuación se analizan algunas actividades propuestas en este ciclo de evaluación formativa que pretenden aportar desde distintos ángulos o instancias del proceso de clasificar figuras, desde el reconocimiento y diferenciación de figuras que cumplen con una determinada característica hasta la elaboración de clasificaciones con criterios propios. También se incluyen en la prueba otras actividades asociadas a los perfiles mencionados, que si bien no han sido analizadas en este documento también aportan al énfasis propuesto de la clasificación, por ejemplo; *Descartando figuras* (incluido en la prueba de tercero), presenta varias figuras y, en un contexto interactivo, se pide al estudiante que identifique cuáles de los polígonos y no polígonos presentados cumplen con determinadas propiedades. Por su parte, dentro del grupo de actividades propuestas con el contexto del Tangram, *Tangram_ángulos rectos* (4.º) apunta al reconocimiento de ángulos rectos en triángulos y cuadriláteros y *Tangram_legajos*, también incluida en la prueba de cuarto, a reconocer características, vinculadas a cantidad de lados y tipo de ángulos de una figura compuesta por dos de las piezas del rompecabezas. Finalmente, *Cardio-tangram* (6.º), que presenta un rompecabezas diferente, pone el énfasis en la comparación de figuras que son piezas del rompecabezas a partir del reconocimiento de sus propiedades.

3.1 ¿Cuál es el intruso?

MAT2947 ¿Cuál es el intruso?_ figuras 1

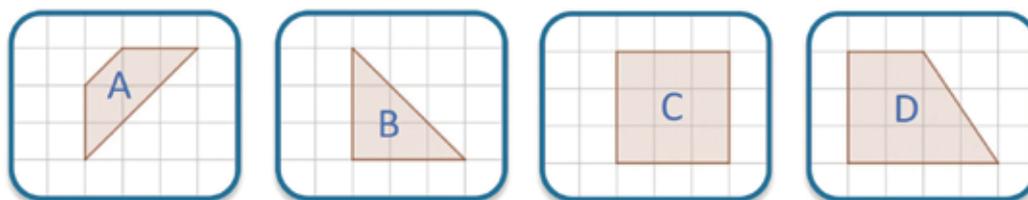
Transversal

¿Cuál es el intruso? es un juego con tarjetas.

En cada partida se muestran 4 tarjetas.

Para decidir cuál es el intruso hay que encontrar el elemento distinto de ese grupo de tarjetas.

De estas 4 tarjetas, ¿cuál es para ti el intruso?



Para responder completa los espacios.

El intruso es la figura _ porque _____
 y todas las otras _____

Dominio	Geometría
Contenido	Figuras planas
Subcontenido	Otros polígonos: definición, propiedades y construcciones.
Competencia	COMUNICAR
Grado	Transversal
Objetivo	Clasificar una figura explicitando el criterio utilizado.
Perfil de egreso 3°	Identificar propiedades comunes y no comunes en la comparación de figuras.
Perfil de egreso 6°	Identificar propiedades comunes a distintas figuras.
Opciones	Justificación de las opciones
Crédito completo	<p>Clasifica una figura explicitando el criterio utilizado. Reciben crédito completo aquellas respuestas que indican la figura y la razón por la que no está incluida en el grupo, mencionando propiedades o características de las figuras propuestas. Ejemplos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • El intruso es la figura B porque es triángulo y los todas las otras son cuadriláteros. • El intruso es la figura B porque no tiene lados paralelos y todas las otras sí. • El intruso es la figura B porque no tiene diagonales y todas las otras sí tienen diagonales. • El intruso es la figura A porque no tiene ángulos rectos y todas las otras sí. • EL intruso es la figura C porque no tiene ángulos agudos y todas las otras tienen ángulos agudos. • EL intruso es la figura C porque todos sus lados son iguales y todas las otras tienen algunos lados distintos. • El intruso es la figura D porque no tiene lados iguales y todas las otras tienen al menos 2 lados iguales. • El intruso es la figura D porque no tiene eje de simetría y todas las otras sí tienen.

Crédito parcial	<p>Clasifica una figura explicitando parcialmente el criterio utilizado. Reciben crédito parcial aquellas respuestas que completen los 2 primeros espacios, indicando una figura y una propiedad de ella, aunque no sea la única que cumpla con esta propiedad. (Puede completar o no el tercer espacio). Ejemplos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • El intruso es la figura C porque es un cuadrado y todas las otras ____ • El intruso es la figura D porque es un trapecio y todas las otras no. • El intruso es la figura A porque es un polígono y todas las otras son polígonos.
Sin crédito	<p>No clasifica una figura explicitando el criterio utilizado. No reciben crédito aquellas respuestas que:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Solo completan el primer espacio y no completan el segundo ni el tercero. o 2) Indican una figura pero en el segundo espacio completan con una propiedad o característica que no posee esa figura (en este caso no importa cómo completen el último espacio). Ejemplos: <ul style="list-style-type: none"> • El intruso es la figura B porque tiene todos sus ángulos agudos. • El intruso es la figura D porque es un rectángulo. <p>o</p> <ol style="list-style-type: none"> 3) Cualquier otra respuesta. Ejemplos: <ul style="list-style-type: none"> • El intruso es la figura B porque ____ y todas las otras ____ • El intruso es la figura D porque es un rectángulo y las todas las otras son otras figuras. • El intruso es la figura D porque no tiene ángulos rectos y todas las otras sí.

Es una propuesta transversal, incluida en las pruebas de tercero a sexto grado que se presenta en un contexto de juego y requiere que el estudiante reconozca características de cada figura involucrada y que las ponga en juego en el conjunto de todas las figuras, para poder identificar aquella que solo tiene la figura que mencionará como intrusa. El criterio de clasificación lo decide el propio estudiante y debe además comunicarlo.

El formato de este ítem, es de los diseños que se incorporaron como novedad de la plataforma en este ciclo. A modo de ordenar a los estudiantes en la comunicación de su argumento, se proponen espacios que éste debe completar. Cabe mencionar que este tipo de formato se corrige por el maestro, al igual que los ítems abiertos, a partir de la guía de codificación que se disponibiliza en la plataforma junto con el ítem.

Se considera que presentar actividades como la anterior tiene varias ventajas. En primer lugar, porque es una actividad accesible para todos los estudiantes ya que habilita que la aborden desde los conceptos que tengan más internalizados, es decir, da lugar a respuestas desde las que podrían considerarse más básicas, donde se distinguen triángulos de no triángulos, hasta otras más elaboradas donde los criterios encontrados se basan en ángulos, diagonales, paralelismo de lados, etc. Se puede ver en los ejemplos de posibles respuestas correctas, proporcionados en la guía para la corrección, algunos de los variados conceptos y abordajes posibles. Se entiende que la variedad de criterios de selección de la figura intrusa se puede ver enriquecida en el abordaje posterior a la aplicación cuando el maestro retoma la actividad para trabajar en clase, si naturalmente no surgieron el maestro las puede introducir y así habilitar su discusión reafirmando el carácter formativo de la propuesta. El carácter “abierto” de la actividad, puede resultar una ventaja para el alumno ya que le da la posibilidad de pensarlo desde la perspectiva que prefiera, pero a la vez puede ser algo desconcertante si el estudiante no está acostumbrado a trabajar con propuestas de este tipo.

En segundo lugar, esta es una actividad donde no hay una única solución, cualquier elemento puede ser el intruso basta con encontrar una característica que la hace diferente de las demás y explicarla correctamente. Como lo establece el programa escolar “se considera didácticamente valiosa la presentación de situaciones que habiliten más de una solución o ninguna. Así se estimulará la capacidad del alumno de utilizar las propiedades y conocimientos que domina y permitirá desarrollar un pensamiento geométrico intuitivo al formular la justificación de la solución presentada” ANEP (2013, p.66-67).

Finalmente, se considera que la propuesta aporta al trabajo con clasificaciones, ya que en la variedad de respuestas de los estudiantes seguramente se vean clasificaciones no habituales. En este sentido, Rodríguez Rava (2011, p. 3) expresa “La potencialidad de las actividades de clasificación radica en formar categorías que permiten “que estén juntas” figuras que en las clasificaciones convencionales no lo están.” Por ejemplo, se podría responder que el intruso es la figura C (cuadrado) si se considera como criterio figuras que tengan algún ángulo agudo ya que el cuadrado no tiene ningún ángulo agudo y las otras figuras tienen por lo menos uno. Usando este criterio pertenecen al mismo grupo las otras figuras, B (triángulo), A (trapezio isósceles) y D (trapezio rectángulo), que son triángulos y cuadriláteros cuando en general suelen ser estas, dos categorías clásicas de clasificación de las figuras.

Vale mencionar que esta actividad está inspirada en las presentadas en Innovamat¹ desarrollada por Cecilia Calvo y David Barba. De acuerdo al planteo de estos autores, en referencia a las actividades del tipo *Quién es el intruso*, en las respuestas que los alumnos pueden dar es posible distinguir dos tipos de argumentos:

- Los que se focalizan en una figura reconociendo una característica de ella y detectando que los demás elementos no la tienen. En este caso se puede decir que parten de un elemento que puede llamar la atención por algún motivo y luego van al conjunto. Por ejemplo, el intruso es la figura C (cuadrado) porque es cuadrado y todas las otras no. O el intruso es la B (triángulo) porque es triángulo y las otras no.
- Los que excluyen un elemento por una característica que el elemento en cuestión no cumple pero que es común en los otros tres. En este caso se puede decir que se mira al conjunto como una globalidad. Por ejemplo: “el intruso es la figura A (trapezio isósceles) porque no tiene ángulos rectos y todas las otras sí” o “El intruso es la figura C (cuadrado) porque no tiene ángulos agudos y todas las otras tienen ángulos agudos” o “El intruso es el figura B (triángulo) porque no tiene lados paralelos y todas las otras sí”.

Calvo y Barba plantean que “este segundo tipo de argumentos son de más calidad lógica pero también más difíciles de formular, porque requieren encontrar características comunes. Aunque podemos dar por válidos los dos tipos de argumentos, siempre que vengan acompañados de una buena justificación, es recomendable animar a los niños y niñas a encontrar del segundo tipo, sobre todo a aquellos que muestran más capacidad de razonamiento”²

Es importante tener en cuenta el aspecto comunicativo de la actividad y notar que se exige la explicitación de características. Es posible que en las respuestas de los niños se evidencien algunas dificultades en el manejo del vocabulario geométrico. Respuestas que no muestran un uso estricto del lenguaje matemático son valiosas también porque pueden ser muestras de avances en el camino de la construc-

1 Innovamat es una start-up fundada en Barcelona en 2016 que desarrolla y distribuye software y actividades docentes para la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria.

2 de <https://innovamat.com/blog/actividad-6-quelis-prismas-y-numeros/>

ción de los conceptos en juego. Al retomar la actividad para trabajar en clase puede resultar una buena oportunidad para incentivar a los niños a incorporar términos geométricos y trabajar algunos de estos aspectos vinculados a la comunicación en geometría. En este sentido, se acuerda con Barba y Calvo que “las actividades que presentamos a los alumnos son las que determinan la extensión del vocabulario de geometría que desarrollamos en el aula ya que entendemos el aprendizaje de términos geométricos al servicio de las necesidades de descripción implicadas en la actividad.” (Barba- Calvo, 2017, p.84)

El uso del vocabulario geométrico es importante pero no es el único aspecto que se pone en juego en este tipo de actividades. En el ejercicio de comunicar juega un papel importante el propósito de la actividad, por ejemplo en la argumentación hay que comunicar para convencer, hay que dar las razones que apoyan una determinada elección. En el caso de este ítem se optó por facilitar el aspecto argumentativo, brindando la estructura lógica del argumento y presentándola incompleta con espacios a completar. Probablemente muchas de las respuestas que reciben crédito parcial es por la demanda de comunicación que conlleva la propuesta, no solo hay que identificar la figura intrusa del conjunto sino también hay que comunicar verbalmente las características que la llevan a esa condición.

Para finalizar el análisis de esta actividad vale reiterar que ésta integra las pruebas de tercero a sexto lo que brinda la posibilidad que el plantel docente del centro pueda obtener información relevante sobre los avances en el logro de las habilidades asociadas a la actividad. En este sentido, una respuesta que probablemente sea de las más frecuentes en tercero y cuarto es la que identifica al triángulo como intruso, lo que mostraría la predominancia de la clasificación de las figuras en base al criterio de la cantidad de lados. Podría ser interesante si al avanzar en la escolaridad aparecen en las respuestas de los estudiantes otros criterios de clasificación de figuras.

A continuación, siempre siguiendo la línea del foco en clasificación, se analizan actividades vinculadas a los triángulos.

3.2 Tangram

Tangram_figuras, presente en la prueba de tercero, se enmarca en el contexto de un rompecabezas y se centra en la habilidad de reconocer triángulos entre un conjunto de figuras, en este caso composiciones de piezas que son representaciones de triángulos y cuadriláteros. Esta actividad complementa la propuesta anterior de reconocimiento de características de las figuras ya que en el análisis de las piezas que integran cada configuración o de las figuras que representan cada una de estas piezas, es necesario distinguir triángulos de no triángulos. En este sentido, la habilidad de reconocer figuras que cumplen con una determinada característica, diferenciándolas de aquellas que no la cumplen, se puede considerar como parte del proceso de clasificar.

Cabe mencionar que para este ciclo de evaluación se diseñaron un conjunto de actividades que utilizan el recurso del Tangram³. En algunos casos a partir de una imagen de él y en otros con la incorporación de un applet que habilita la manipulación de las piezas lo que favorece la elaboración de conjeturas.

Los rompecabezas, entre otras cosas, son muy útiles a la hora de enriquecer la imagen conceptual

³ Tangram_figuras (3.º), Tangram_legajos (4.º), Tangram_diseño (3.º y 4.º), Tangram_igual área y Tangram_equicomposición (5.º)

que los estudiantes tienen de las figuras, en particular la manipulación de las piezas favorecen el mover, probar, comparar, comprobar hipótesis, etc., todas acciones que son parte del recorrido natural en el camino hacia la conceptualización de las figuras geométricas.

En el caso de la prueba de tercero, además de *Tangram _figuras* se incluye el ítem *Tangram _diseño*, asociado al contenido Magnitudes y medidas.

MAT2894 Tangram _figuras	3.º año
--------------------------	---------

El Tangram es un rompecabezas muy antiguo de origen chino. Es un cuadrado que se compone de 7 piezas.

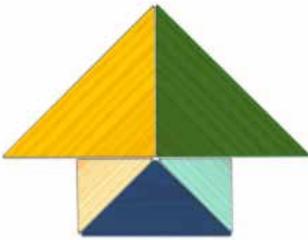


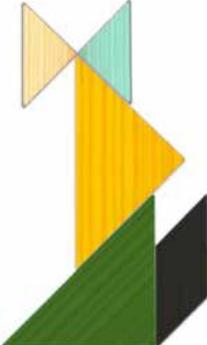
Usando esas piezas, sin superponerlas, se pueden armar muchas figuras.

¿Cuál de estas figuras se formó solo con triángulos?

A) 

B) 

C) 

D) 

Dominio	Geometría
Contenido	Figuras planas
Subcontenido	Triángulos: definición, propiedades y construcciones
Competencia	APLICAR CONCEPTOS
Grado	3.º año
Objetivo	Reconocer triángulos.
Perfil de egreso 3º	Reconocer y reproducir figuras geométricas del plano y del espacio en función de sus características.

Opciones	Justificación de las opciones
A	No reconoce los triángulos entre otras figuras. Selecciona una composición de figuras que incluye un cuadrado, posiblemente esta selección se ve favorecida por la posición del cuadrado y por la composición de las figuras.
B	No reconoce los triángulos entre otras figuras. Posiblemente confunde los triángulos con los cuadriláteros.
C	CLAVE Reconoce triángulos entre otras figuras.
D	No reconoce los triángulos entre otras figuras. Selecciona una composición de figuras que incluye un paralelogramo, posiblemente esta selección se ve favorecida por la posición del paralelogramo y por focalizarse en sus ángulos agudos.

Las opciones de respuesta presentan composiciones de distintas piezas del Tangram en posiciones que no necesariamente coinciden con la que se presenta en la composición original del rompecabezas.

En relación a las alternativas de respuesta no correctas, la de menor logro parecería ser la opción B, ya que esta opción presenta una composición sencilla, teniendo en cuenta la cantidad de piezas que la componen, a diferencia de las otras opciones y está formada únicamente por cuadriláteros. Podría pensarse que los estudiantes eligen esta opción porque confunden cuadriláteros con triángulos.

En la opción D la composición consta de cuatro triángulos y un paralelogramo. La posición en la que se presenta la pieza que representa el paralelogramo puede favorecer la asociación con los triángulos al focalizarse en uno de sus ángulos agudos y asociando triángulo con figuras que presentan como una “punta”, sin tener en cuenta la cantidad de lados de la figura.

En el caso de la opción A, la composición involucra cuatro piezas, una de ellas corresponde a la representación de un cuadrado. Posiblemente también la posición en la que se presenta esta pieza juegue un papel importante a la hora de reconocerla como cuadrado ya que no corresponde a la posición habitual en que se presenta. A su vez esta pieza está acompañada por otro cuadrado, pero en este caso producto de una composición de dos triángulos, la presencia de esta composición puede haber dificultado la visualización del cuadrado como pieza única. Cabe destacar que en esta actividad no es necesario el reconocimiento del cuadrado como figura de cuatro lados y cuatro ángulos iguales sino que alcanza con que lo reconozca como cuadrilátero.

Otras de las propuestas que integran las pruebas de este ciclo que incluyen el Tangram requieren del reconocimiento del cuadrado o de los triángulos como isósceles rectángulos, por ejemplo en *Tangram_ángulo recto*. Este reconocimiento no es sencillo ya que implica múltiples deducciones y cadenas lógicas de razonamiento que podrían incluso estar fuera del alcance de la etapa escolar en la que se proponen estas actividades. La idea es que el niño trabaje a partir de lo que “parece ser” la figura y en el trabajo en clase, con el acompañamiento del maestro, pueda llegar a la confirmación de esos supuestos a partir de secuencias lógicas donde haga uso de propiedades y relaciones. También en el caso de las propuestas que incluyen un applet puede responder a partir de la confirmación de propiedades de las figuras por manipulación de las piezas (ejemplo, *Tangram_equicomposición*).

3.3 Triángulos en el geoplano

A continuación se analizan dos propuestas elaboradas a partir del mismo contexto, un geoplano virtual, vinculadas al concepto de triángulos, en esta oportunidad, triángulos particulares.

En el caso de la primera, *Triángulos en el geoplano_cuántos* se incluye en las pruebas de quinto y sexto año y tiene por objetivo evaluar el reconocimiento de triángulos isósceles.

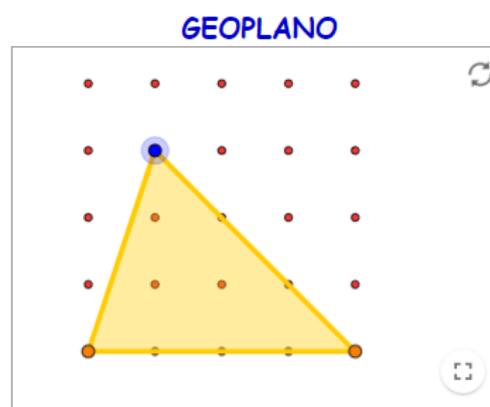
MAT2945 Geoplano ¿cuántos isósceles?

3.º año

Armamos triángulos en el geoplano

Este es un geoplano virtual.

Moviendo el punto azul puedes obtener distintos triángulos.

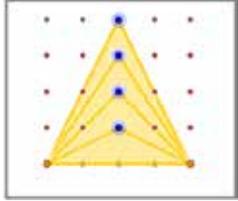
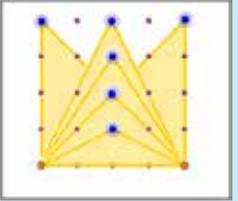


¿Cuántos triángulos **isósceles** se pueden formar en total?

Triángulo **isósceles** es el que tiene dos lados de igual longitud.

- A) 1
- B) 4
- C) 6
- D) 20

Dominio	Geometría
Contenido	Figuras planas
Subcontenido	Triángulos: definición, propiedades y construcciones.
Competencia	APLICAR CONCEPTOS
Grado	5to y 6to años
Objetivo	Reconocer triángulos isósceles.
Perfil de egreso 6º	Describir, comparar y clasificar figuras en función de distintas propiedades y representaciones.

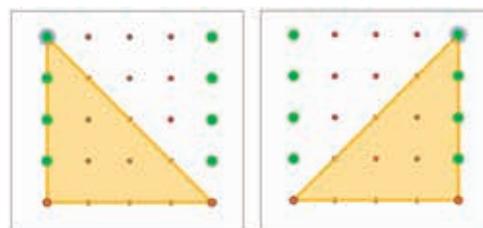
Opciones	Justificación de las opciones	
A	No reconoce todos los triángulos isósceles posibles. Probablemente solo considera uno en la posición habitual o responde uno por el triángulo que se muestra en el geoplano sin atender a que no es isósceles.	
B	No reconoce todos los triángulos isósceles posibles. Probablemente solo reconoce los triángulos isósceles no rectángulos (los 4 que se forman cuando el tercer vértice coincide con los puntos que están en la columna del medio). O Reconoce 4 de los posibles triángulos isósceles.	
C	CLAVE Reconoce todos los triángulos isósceles posibles. Los 4 que se forman cuando el tercer vértice coincide con los puntos que están en la columna del medio y los 2 isósceles rectángulos que se forman cuando el tercer vértice coincide con los puntos de las esquinas superiores.	
D	No reconoce todos los triángulos isósceles posibles. Probablemente responde con la cantidad de triángulos que se pueden formar usando como tercer vértice uno cualquiera de los 20 puntos del geoplano que no corresponden a la base del triángulo. No atiende a la condición de isósceles de la consigna.	

Estas actividades incluyen un geoplano virtual, que simula uno tradicional y brinda al estudiante la posibilidad de interactuar con el recurso, explorando la situación para luego seleccionar su respuesta. En el siguiente link se encuentra un geoplano virtual que permite ampliar el rango de las actividades propuestas en estos ítems. (<https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/>).

En *Geoplano ¿cuántos isósceles?* se presenta en el geoplano un triángulo y la tarea consiste en reconocer la cantidad total de triángulos isósceles que se pueden construir manteniendo dos vértices fijos.

Cabe notar que se incluye la información que indica a qué figura se le llama triángulo isósceles, ya que esta propuesta no tiene la intención de evaluar la recuperación de su definición, sino que busca generar espacios para los procesos de conceptualización que tienen que ver con las propiedades de este tipo de figuras, en particular permite explorar triángulos isósceles de diferentes tamaños y posiciones.

Esta actividad se incluyó en la propuesta en el entendido que problematiza el concepto de triángulo isósceles al requerir identificarlos cuando no todos se presentan en posiciones estereotipadas. La propuesta se enmarca dentro de una geometría dinámica, según el planteo de Vecino citado por Rodríguez Rava (2015) al incluir diversas representaciones de un objeto geométrico, los triángulos isósceles, en un mismo registro de representación, que en este caso está dado por el geoplano virtual. Esta se aleja de las propuestas asociadas a una geometría estática generada por el abuso de las representaciones estereotipadas de las figuras que llegan a favorecer concepciones limitadas de ellas, como señala Rodríguez Rava.



A su vez, reconocer el par de triángulos rectángulos que se pueden formar con el lado fijo que se da, como triángulos isósceles, evidencia un logro avanzado en el reconocimiento de figuras que escapan al estereotipo.

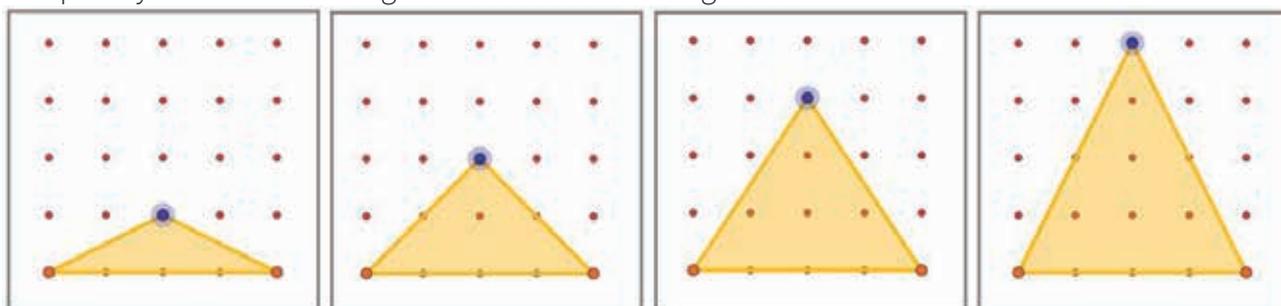
Esta actividad que se podría considerar de conteo de los triángulos que se pueden formar, va mucho más allá de eso. Tal como lo considera Duval citado por Rodríguez Rava (2015), esos triángulos isósceles rectángulos no son inmediatamente perceptibles e implican una reorganización figural donde el niño tiene que desprenderse de la imagen habitual de la figura en cuestión para poder pensar en otros triángulos posibles. La presencia del recurso virtual permite una construcción rápida o fluida de las figuras (en este caso triángulos) y facilita por ello el descubrimiento de regularidades. Esta actividades se enmarcan en una geometría exploratoria que como plantea Rodríguez Rava (2015, p. 15) permite “hacer conjeturas, anticipar resultados y llegar a conclusiones que puedan ser validadas apelando a razones geométricas, frente a una geometría “fría” basada en nominalismo, ostensión y algoritmización”.

Una posible estrategia para encontrar todos los triángulos isósceles en las condiciones pedidas puede ser es mover el punto azul en todas las posiciones posibles, en un razonamiento asociado al ensayo y error, y mediante la observación, identificar cuáles son isósceles y contarlos. Otra estrategia viable es anticiparse a cuáles podrían ser los terceros vértices de los triángulos, a fin de que sean isósceles, sin necesidad de llegar a construirlos. Explorar, visualizar, en diferentes situaciones y contextos favorece la construcción del concepto más que la presentación directa de los contenidos geométricos.

Un breve análisis de las opciones de respuesta puede aportar información sobre los niveles de aproximación en el proceso de conceptualización de triángulo isósceles que tiene el estudiante. En este sentido, en el caso de los estudiantes que eligen la opción D(20) podría decirse que no reconocen triángulos isósceles ya que éste número corresponde a la cantidad total de triángulos que se pueden formar manteniendo el lado dado como fijo, muchos de los cuales no son isósceles.

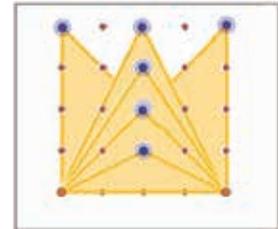
En el caso de la opción A (1), posiblemente el estudiante identifica un triángulo isósceles de los posibles aunque también puede darse el caso de que seleccione esta opción por el triángulo que se presenta en el geoplano que no es isósceles. Es importante seguir indagando para confirmar si la respuesta del estudiante se vinculó a la posibilidad de construir o visualizar algún triángulo isósceles o simplemente respondió a partir de la cantidad de triángulos que muestra la imagen sin tener en cuenta sus propiedades. En este caso, solo el maestro en el intercambio con los niños y en el trabajo post aplicación puede recabar información e indagar en qué etapa de la conceptualización están los niños que eligieron esta opción.

La opción B (4), que no corresponde a la respuesta correcta, evidencia una buena conceptualización de triángulo isósceles, aunque todavía en proceso, ya que probablemente los estudiantes que eligen esta opción reconocen los triángulos isósceles en ciertas posiciones estereotipadas pero no en otras. Puede ser que siempre hayan visualizado triángulos isósceles como los siguientes:



Llegar a la respuesta correcta implica un alto requerimiento cognitivo, opción correcta C (6) que evidencia un estadio avanzado en este proceso de conceptualización superando la presentación habitual del triángulo isósceles. El estudiante que elige esta opción logra identificar todos los triángulos isósceles posibles basándose en la definición más allá de las posiciones en que se presenten.

Esta opción incluye los dos triángulos que pueden ser los más difíciles de identificar como isósceles. Probablemente, en una primera instancia, en estos triángulos será percibido su ángulo recto, favorecido por la posición. Identificar estos triángulos también como isósceles, requiere además reconocer que hay triángulos que son rectángulos e isósceles a la vez.



Esto se relaciona con un tipo de actividades de clasificación que Fripp y Varela mencionan como “Cruce de clasificaciones”, se trata de actividades que consisten en estudiar si una figura perteneciente a una clase obtenida luego de cierta clasificación puede pertenecer a otra clase de figuras obtenidas al aplicar otro criterio de clasificación. (Fripp y Varela, 2012, p. 66).

La otra actividad elaborada con el contexto del geoplano virtual se incluye en la prueba de quinto año, *Triángulos en el geoplano_característica*.

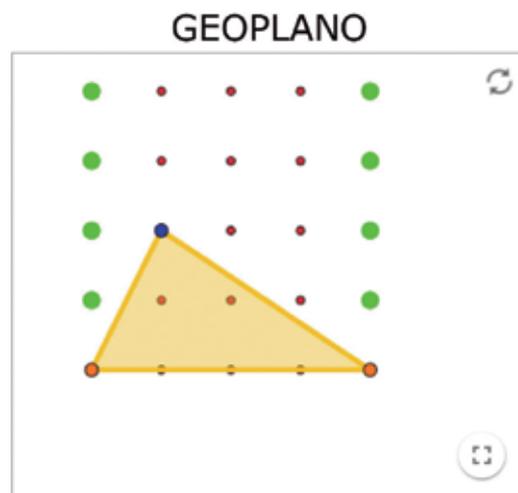
MAT2946 Geoplano_característica de los triángulos

5.º año

Armamos triángulos en el geoplano

Este es un geoplano virtual.
Moviendo el punto azul puedes obtener distintos triángulos.

Imagina que el punto azul solo puede ocupar el lugar de los puntos verdes.



¿Qué característica tienen TODOS los triángulos que se pueden armar así?

- A) Tienen 2 lados iguales.
- B) Tienen un ángulo recto.
- C) Todos sus lados miden 5 unidades.
- D) Todos sus ángulos son agudos.

Dominio

GEOMETRÍA

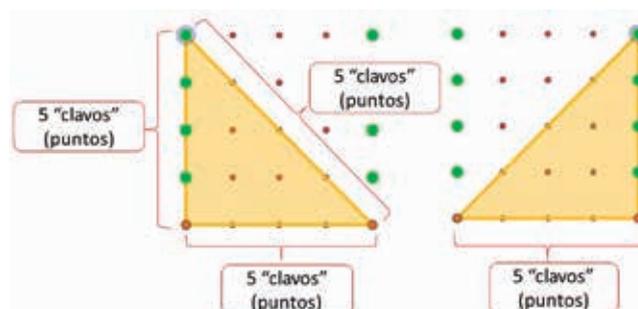
Contenido	FIGURAS PLANAS
Subcontenido	Triángulos: definición, propiedades y construcciones.
Competencia	APLICAR CONCEPTOS
Grado	5to año
Objetivo	Reconocer una característica en común de distintos triángulos.
Opciones	Justificación de las opciones
A	No reconoce la característica en común de los distintos triángulos. Probablemente no visualiza todos los triángulos de acuerdo a la consigna. O se focaliza en los triángulos que se forman usando como tercer vértice el punto ubicado en la esquina superior derecha e izquierda (rectángulos isósceles).
B	CLAVE Reconoce la característica en común de los distintos triángulos. Visualiza los triángulos que se forman y reconoce que todos tienen un ángulo recto.
C	No reconoce la característica en común de los distintos triángulos. Posiblemente se focaliza en el lado común de los triángulos y responde con la cantidad de puntos que se ubican en ese lado. O se focaliza en los triángulos que se forman usando como tercer vértice el punto ubicado en la esquina superior derecha e izquierda e interpreta que sus 3 lados son de la misma longitud (por incluir 5 puntos en cada uno).
D	No reconoce la característica en común de los distintos triángulos. Puede que responda atendiendo a algunos de los ángulos de los triángulos que puede formar.

En esta ocasión, así como para la actividad anterior, el geoplano virtual se presenta como una herramienta de apoyo para el estudiante, que de ser necesario podrá utilizarla para construir los triángulos. Sin embargo, también puede imaginarse los triángulos que resultan al mover el punto azul en las distintas posiciones mencionadas sin necesidad de usar el recurso de este applet.

En esta actividad la construcción está más pautada ya que se definen las posibles posiciones del tercer vértice de los triángulos en los que hay que fijar la atención. Es así que, a diferencia del ítem anterior, acá se “dan” todos los triángulos y es necesario reconocer la característica que comparten mientras que en el ítem anterior se definía la característica que compartían (ser isósceles) y se solicitaba reconocer cuántos había. La tarea requiere entonces que el estudiante logre abstraer, a partir de la observación de los triángulos en su conjunto y focalizándose en sus características, propiedades y relaciones entre objetos geométricos, una característica común.

Una de las opciones que muestra menor logro en relación a la identificación de propiedades comunes es la opción C (Todos sus lados miden 5 unidades).

Esta alternativa corresponde a una característica que tiene que ver con los lados (uno o hasta tres según el triángulo) ya que atiende a los 5 “clavos” que abarca el lado y no advierte que el 5 corresponde a cantidad de puntos (clavos) pero no a longitud del lado.



Posiblemente surge de focalizarse en alguno de los triángulos ya que no es una característica de algún triángulo de los que se pueden formar y no de todos.

Otra opción que refiere también a características relacionadas con los lados de las figuras es la opción A (Tienen dos lados iguales). Probablemente los estudiantes que eligen esta opción tampoco visualizan todos los triángulos que cumplen con la condición, se focalizan en los triángulos que se forman usando como tercer vértice el punto ubicado en las esquinas superiores o los visualizan pero eligen una característica común a algunos de ellos. Esta última hipótesis puede corresponder a una etapa previa a encontrar un criterio con una característica común a todas las figuras involucradas para clasificar.

En las otras opciones se ponen en juego conceptos específicos referidos a amplitud de ángulos (ángulo agudo, ángulo recto). La opción D (Todos sus ángulos son agudos) también refiere a una condición que no cumple ninguno de los triángulos involucrados. Puede que el alumno solo esté mirando algunos de los ángulos de todos los triángulos y asuma que los 3 ángulos de cada triángulo son agudos o que no haya incorporado el concepto ángulo agudo o de ángulo recto.

Para arribar a la respuesta correcta se deben tener en cuenta varios aspectos. Se requiere identificar que cada uno de los triángulos cumple con la propiedad de tener un ángulo recto, ya sea realizando la construcción o por un procedimiento anticipatorio de visualización, y además reconocer que esta es la propiedad común a todos los triángulos, lo que implica manejar relaciones intra e interfigurales. En este sentido, si bien los estudiantes están familiarizados desde cursos anteriores con los conceptos involucrados, esta actividad puede ser compleja ya que exige que el estudiante ponga en juego varias habilidades simultáneamente ya que la presentación no permite ver todos los triángulos a la vez, lo que puede dificultar el reconocimiento de características de cada una de ellas.

4. Resolver situaciones en el campo de los números naturales asociadas a divisibilidad, conteo y reconocimiento de regularidades

Atendiendo al énfasis definido para el ciclo 2021 vinculado al dominio Número se diseñaron actividades que se centran en la multiplicación y la división, el reconocimiento de múltiplos y divisores de un número, cantidad de divisores de un natural y regularidades asociadas a estos conceptos.

En concordancia con lo que plantea la CACEEM en el Libro para el maestro, Matemática en el segundo ciclo (ANEP, CEIP, 2017), la propuesta en referencia a este foco apunta a jerarquizar el trabajo exploratorio, distante del que se basa en la aplicación de un listado de criterios de divisibilidad de aplicación mecánica y con especial cuidado en la selección de los números involucrados de forma de que los estudiantes puedan poner en juego sus propios repertorio de cálculos y distintas estrategias más o menos artesanales.

Uno de los objetivos de la enseñanza de las operaciones a lo largo de la escolaridad es su comprensión más allá del uso de determinados algoritmos de cálculo. Esto se manifiesta, por ejemplo, en el uso de los conceptos y las relaciones que se dan entre los términos de cada operación y entre las distintas operaciones para construir nuevas relaciones, argumentar y resolver situaciones nuevas. Hoy día es una opinión bastante generalizada entre especialistas en la enseñanza de la matemática y docentes en general, la relevancia de la adquisición del concepto de división a través de la problematización y el planteo de situaciones donde la operación adquiere distintos significados y sin la focalización casi exclusiva en el algoritmo convencional. Por ejemplo, Barba y Calvo (2010, p.41) manifiestan que “Saber dividir no es dominar el algoritmo de la división, sino poder resolver un cierto tipo de problemas utilizando estrategias que no necesariamente han de pasar por la ejecución del algoritmo estándar de la división”.

En la misma línea el Programa escolar vigente en lo que refiere a las operaciones plantea (ANEP, 2008, p.62) “Cuando se habla de operaciones no se hace referencia a “hacer cuentas”, sino a conocer y poner en juego los conceptos y las relaciones que la operación representa.” A su vez en el Documento Base de Análisis Curricular (p.24) se explicita como perfiles de egreso en lo que refiere a las regularidades, especialmente en el caso de sexto grado, focalizado en la resolución de problemas y situaciones que impliquen relaciones entre múltiplos y divisores y el uso de criterios de divisibilidad. En el caso de las operaciones, el énfasis para cualquiera de los dos mojones en los que se definen los perfiles está en resolver situaciones de cálculo apelando a la modificación del lugar de la incógnita e identificar la relación entre las operaciones (multiplicación y división).

Para lograr estos objetivos y un uso flexible y reflexivo, en este caso de los conceptos asociados a la división, el conteo y el reconocimiento de regularidades, es imprescindible que adquieran sentido para el estudiante tal como menciona Vergnaud (1990) en su Teoría de los campos conceptuales “A través de las situaciones y los problemas que se pretenden resolver es como un concepto adquiere sentido para el niño”. (Traducción de Godino, p.1)

Las actividades incluidas en esta propuesta formativa se pueden ubicar en algún punto del rango de situaciones que van desde aquellas para las cuales el estudiante dispone en su repertorio, de forma

relativamente inmediata, de las herramientas y habilidades necesarias para su resolución hasta aquellas en las que el niño puede no disponer de todas ellas, pero a través de la reflexión y la exploración llega a su resolución. En este sentido, al resolver las distintas situaciones juegan un papel importante los “esquemas” como “organización invariante de la conducta para una clase de situación dada” que plantea Vergnaud (1990) (en la traducción de Godino, p.2) Estos esquemas en las situaciones nuevas para el niño, o que él asume como nuevas, implican parte de la automaticidad pero fundamentalmente de la decisión consciente del niño al analizar dudas, relacionar esquemas disponibles en su repertorio, reflexionar sobre ellos, descubrir nuevos aspectos y eventualmente nuevos esquemas. Es en el momento de retroalimentación, cuando el maestro decide retomar esta actividad para trabajar en el aula, a través de un trabajo colectivo que potencie las discusiones entre los estudiantes, que se continúa con el trabajo de reflexión y exploración y se facilitan las asociaciones entre conceptos.

Ejemplo de actividades donde el niño puede poner en juego esos esquemas que combinan cierta automaticidad a la vez que reflexión es la serie *Collares* que pretende indagar en la habilidad de los estudiantes en el reconocimiento de múltiplos de un natural. Incluye propuestas para las pruebas de tercero, cuarto y quinto en las que el niño puede llegar a la respuesta poniendo en juego distintas estrategias, como conteo, recuperando hechos numéricos automatizados o conocidos como lo pueden ser las tablas o usando estrategias personales que se apoyan en representaciones artesanales. También en la prueba de sexto año el ítem *Leyendo* apela al concepto de múltiplo pero incorpora condiciones que complejizan el planteo. Esa actividad se complementa con *Laberinto* que también apela a esquemas conocidos por el niño pero requiere aplicarlos simultáneamente, esquemas asociados a los conceptos de múltiplos y divisores de un número.

A continuación se analiza la serie, *Pintando el rectángulo* inspirada en una propuesta de Barba y Calvo (2014) que tiene por objetivo propiciar que un concepto emerja, para luego avanzar en su institucionalización. Esta primera propuesta corresponde a un ítem transversal a todas las pruebas en la que el concepto matemático implicado es el de divisor de un número, sin embargo, la forma en la que está presentado el ítem permite aproximaciones implícitas a él.

4.1 Pintando el rectángulo

MAT2946 Geoplano_característica de los triángulos

5.º año

Pintando el rectángulo

Te proponemos pintar todo el rectángulo blanco (sin salir de su borde) con los stickers siguiendo estas reglas:

- solo puedes usar stickers del mismo color, y
- no puedes superponerlos.

Arrastrando los stickers puedes probar aquí



28 cuadraditos

Stickers

1 cuadradito 2 cuadraditos 3 cuadraditos 4 cuadraditos 5 cuadraditos 6 cuadraditos 7 cuadraditos

Imagina que tienes muchos stickers de cada color.

¿De qué color puede quedar pintado el rectángulo?
 Seleccionada TODAS las opciones posibles.

• Los stickers NO te van a alcanzar pero probar te puede ayudar a pensar.
 • Recuerda que solo puedes usar stickers del MISMO COLOR en cada intento.

Dominio	Números
Contenido	Divisibilidad
Subcontenido	Múltiplos y divisores
Competencia	Resolver problemas.
Aplicación	3ero, 4to, 5to y 6to de Primaria
Objetivo	Identificar divisores de un número en un contexto geométrico.
Perfil de egreso 3º	Reconocer y utilizar regularidades del sistema de numeración decimal como apoyo para la representación numérica y el cálculo.
Perfil de egreso 6º	Resolver situaciones que impliquen las relaciones entre múltiplos y divisores.

Opciones	Justificación de las opciones
Crédito completo	En un contexto geométrico identifica todos los posibles divisores de un número dado. Reciben crédito completo aquellas respuestas en que selecciona las 4 posibilidades correctas (stickers de 1, 2, 4 y 7 cuadraditos) y ninguna incorrecta.
Crédito parcial	En un contexto geométrico identifica algunos de los posibles divisores de un número dado. Reciben crédito parcial aquellas respuestas en que selecciona: 1) 2 o 3 de las posibilidades correctas y ninguna incorrecta o 2) una sola correcta (distinta del 1) y ninguna incorrecta.
Sin crédito	En un contexto geométrico no identifica posibles divisores de un número dado. No reciben crédito cualquier otra respuesta inclusive en las que selecciona alguna figura incorrecta o solo la figura de 1 cuadradito.

El trabajo con múltiplos y divisores se ubica en el final del proceso de estudio de las situaciones multiplicativas y se enfoca en el análisis de las relaciones entre ambos conceptos. Para lograr la construcción de sentido es necesario apoyarse en procesos que se inician mucho antes. Por ejemplo, los repertorios multiplicativos memorizados que surgen del trabajo con series numéricas (dentro de las que podrían ubicarse las tablas) así como las relaciones de doble-mitad, triple-tercio, etc. Contribuyen también las experiencias de los niños en reflexiones sobre las relaciones entre multiplicación y división y sus propiedades. (NAP 6, p.88 y Libro para el maestro, Matemática en el segundo ciclo de la CACEEM, p. 21).

El ítem diseñado para este ciclo de pruebas formativas se presenta como un desafío con ciertas reglas: solo se pueden usar fichas o stickers iguales y no se pueden superponer. Esto responde a que el objetivo del ítem es reconocer cuales de los números ofrecidos son factores (divisores) de 28.

La propuesta incluye un applet⁴ que permite al niño experimentar, antes de responder, además de requerir realizar alguna inferencia. Es así que una posible estrategia de resolución es, haciendo uso del applet, intentar cubrir el rectángulo blanco con los stickers de cada color. Se decidió incluir menos fichas de las necesarias de cada color por dos motivos, por un lado para favorecer que el niño realice alguna inferencia a partir de lo que observa en la experimentación y no responda solo manipulando las fichas y realizando el correspondiente conteo. Por otro lado, para evitar el error de interpretación en el caso de que cubriera el rectángulo por exceso y lo interprete como que se cubrió de forma exacta (por ejemplo con 6 fichas de 5).

Al tratarse de un ítem transversal, las distintas estrategias puestas en juego en la resolución pueden dar cuenta del acercamiento al concepto de divisor que tiene cada niño. Por otro lado, dado que la actividad implica que el niño pueda identificar cómo componer 28 en partes iguales, permite observar el avance en la comprensión y conceptualización de las situaciones multiplicativas. Es un ejemplo de problema multiplicativo que se ubica dentro de los de agrupamiento (o partición), ya que se conoce el total y el valor de cada parte y lo que interesa es saber, aunque esto no se pregunta en forma explícita, el número de partes. Sólo se debe responder si es posible la división (partición) del total en alguna de las partes propuestas. (Libro para el maestro, Matemática en el primer ciclo de la CACEEM (2016), NAP (2006))

Por otro lado, considerando los tipos de problemas que propone Vergnaud (1991, cap. 11), se ubica

4 <https://www.geogebra.org/m/pa4wjthm>

en los de un solo espacio de medidas (en este caso el número de cuadraditos de las piezas) donde la respuesta implica identificar que se puede encontrar un número entero de piezas iguales para cubrir el rectángulo blanco.

Una de las posibles estrategias podría ser ubicar, una al lado de otra, las fichas iguales que ofrece el applet y luego contar los cuadraditos restantes y evaluar si se puede completar con más fichas del mismo tipo.

A modo de ejemplo, el niño podría probar con la ficha 3 y una vez que ha usado todas las fichas disponibles llega a esta situación:



Quedan 16 cuadraditos en blanco y no se pueden llegar a cubrir con fichas de 3 sin que sobren o falten. Acá podría estar considerando un hecho numérico conocido, que 16 no se puede descomponer en forma exacta de a tres, ya que “el 16 no está en la tabla del 3”. En este razonamiento, al poner en juego el conocimiento de una tabla de multiplicar, se involucra una herramienta que es parte del proceso de la construcción de los conceptos de múltiplo y divisor. La estrategia de usar la tabla de multiplicar se podría aplicar directamente con el 28, el usarla con un número más pequeño (el 16) puede dar cuenta de una apropiación parcial de las regularidades de la tabla de multiplicar ya que resuelve un problema similar al original, con números más pequeños (la cantidad de cuadraditos que le faltan por cubrir).

En el Cuaderno para hacer matemática en tercero se incluye la propuesta *Una tabla particular* con varias actividades que orientan la construcción de la tabla pitagórica a partir de la reflexión sobre regularidades numéricas (CACEEM, 2016, p.54-55).

Otra posible estrategia es que vaya “corriendo” las fichas disponibles una vez que se le acaban:



Hasta obtener:



Así puede llegar a verificar experimentalmente que con la ficha de 3, por ejemplo, no puede cubrir el rectángulo blanco sin que sobren o falten cuadraditos.

Un razonamiento similar puede hacer con las otras fichas. Se trata de una estrategia experimental, pero que a la vez requiere ser exhaustivo y organizado para obtener la respuesta.

Usando esta estrategia de exploración de forma exhaustiva, el niño puede concluir, que con las fichas de 1, 2, 4 y 7 cuadraditos, es posible cubrir exactamente el rectángulo y que con las otras quedan cuadraditos sin cubrir (o eventualmente al agregar otra ficha “se pasan”). A esta inferencia es posible llegar haciendo uso de distintas representaciones, una primera aproximación, puede remitir a sumas reiteradas como: $7+7+7+7$, $4+4+4+4+4+4+4$, etc. Si bien se trata de una descomposición aditiva, es un primer paso necesario para construir la noción de multiplicación como suma iterada.

Dado que en el caso de las fichas de 2 y 1 cuadradito la suma resulta tediosa, es posible que los conduzca con cierta naturalidad a considerar posibles productos de resultado 28, por ejemplo 2×14 y 1×28 . En este caso estarían abordando la actividad a partir de repertorios multiplicativos. Toman entonces protagonismo las tablas de multiplicar que tienen un papel relevante en la construcción y automatización de los repertorios multiplicativos. Para los niños que estén familiarizados con su uso, una posible estrategia es identificar “en qué tablas está el 28”. Podría ocurrir que los que resuelvan el problema con esta estrategia elijan: 2, 4 y 7 cómo respuestas correctas y no incluyan al 1.

Finalmente, quizás los estudiantes más grandes, puedan utilizar como estrategia la división (significado de partición) y así elijan las fichas en que la división es exacta (resto 0). Por ejemplo: 28 dividido 7 da 4 y resto 0, entonces el 7 sirve y descartan el 5 ya que 28 dividido 5 da 5 y resto 3 (NAP 3, p.69).

Teniendo en cuenta el aporte formativo de la actividad, en un trabajo posterior en clase, se puede dar un paso más, preguntando por el número de fichas de cada tipo necesarias para cubrir el rectángulo, que brinda la oportunidad de analizar los productos con resultado 28. Esto puede colaborar a que los estudiantes más pequeños construyan repertorios de descomposiciones multiplicativas que son fundamentales en el momento de comprender los algoritmos de división (NAP 3, p.84).

En el caso de los grados más altos en un trabajo posterior a la aplicación, el análisis de las distintas estrategias utilizadas puede permitir establecer relaciones entre la multiplicación y la división exacta, por ejemplo $4 \times 7 = 28$ entonces $28 : 7 = 4$ resto 0 y $28 : 4 = 7$ resto 0.

También una aproximación a las relaciones múltiplo y divisor tanto desde la multiplicación: “como $4 \times 7 = 28$ entonces 4 y 7 son divisores de 28 y 28 es múltiplo de 4 y de 7”; como desde las divisiones exactas “ $28 : 7 = 4$ resto 0 entonces 7 es divisor de 28 y $28 : 4 = 7$ resto 0 entonces 4 es divisor de 28”.

En la instancia de retroalimentación, tanto el applet como el uso de material manipulativo, brinda al maestro la oportunidad de indagar el tipo de estrategia desarrollada por los niños para obtener la respuesta.

En el Cuaderno para hacer matemática en quinto de la CACEEM (p.44) presenta la actividad *La pulga y las trampas*, que como se menciona en el Libro para el maestro de segundo ciclo, (CACEEM, p.23) “el contexto lúdico se presenta como fértil escenario para discutir cuestiones vinculadas a los múltiplos y divisores”. La actividad puede ser una interesante extensión de lo avanzado en el trabajo con este ítem.

En cuanto al diseño del ítem, cabe destacar que corresponde a uno de los formatos nuevos en la plataforma SEA y habilita la elección de más de una respuesta correcta. Esta funcionalidad es clave en las decisiones tomadas en la asignación de créditos ya que permite observar el avance en la construcción del concepto de divisor.

Obtener el crédito completo (stickers de 1, 2, 4 y 7 cuadraditos) implica desarrollar un pensamiento exhaustivo, el niño no debe conformarse con una opción correcta, sino que debe buscar todas las opciones correctas y descartar todas las incorrectas.

Para el crédito parcial, se decidió incluir un amplio abanico de respuestas, cualquiera que incluya una o más opciones correctas pero ninguna incorrecta, excepto si elige solo el 1, En el caso del stickers de 1 cuadradito, el alumno la puede elegir sin realizar ninguna inferencia, solo observando la cuadrícula del rectángulo blanco, es por ese motivo que se decidió no dar crédito a aquellas respuestas que seleccionan únicamente esta posibilidad. La variedad de respuestas dentro del crédito parcial permite que el maestro detecte distintos niveles de avance en el logro: qué niños se conforman con una opción correcta y cuáles incluyen alguna más, u otros que el maestro considere relevantes. Podría ocurrir que algún niño realice generalizaciones incorrectas como por ejemplo: “elijo 2, 4 y 6 porque son pares igual que 28” esta es otra de las razones por las que no se da ningún tipo de crédito a las respuestas que incluyan alguna opción incorrecta.

El otro motivo para no aceptar ninguna opción incorrecta ni en el crédito total ni en el parcial, responde al hecho de que se trata de identificar que los estudiantes reconocen (implícita o explícitamente) divisores de 28 y los distinguen de los que no lo son. Lo relevante es que pueda distinguir cuáles números son posibles factores de 28 ya sea por el reconocimiento de sumas del mismo factor, por multiplicaciones, por divisiones o recurriendo a repertorios multiplicativos como pueden ser las tablas. Tampoco se acepta la elección de solo el 1, como respuesta parcial, porque al coincidir con el tamaño de la cuadrícula, no queda claro si está analizando la situación y utilizando el concepto involucrado en el ítem, posiblemente solo realice el conteo 1 a 1.

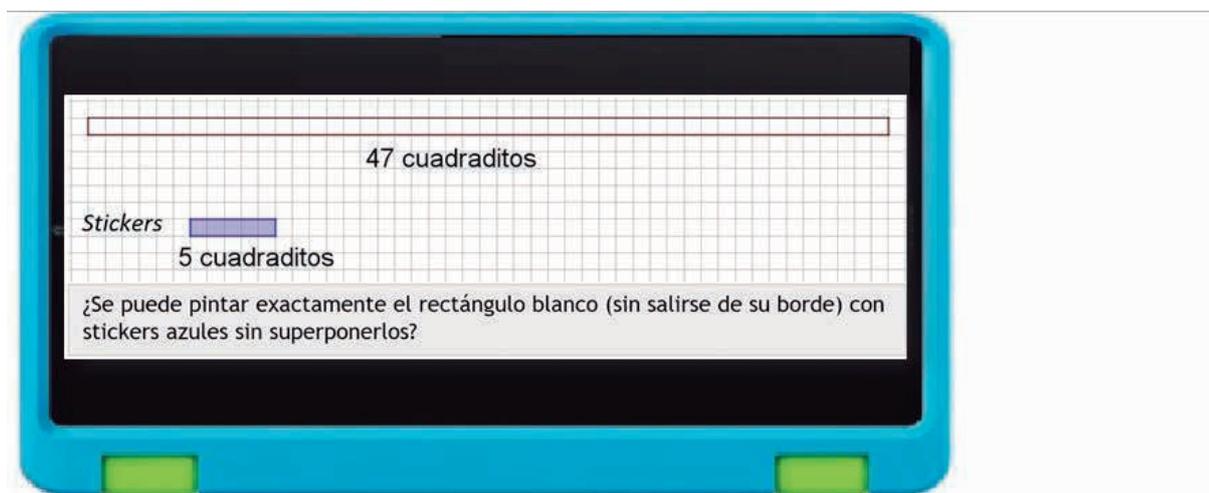
Por lo tanto las respuestas que incluyen alguna opción incorrecta y aquellas que eligen solo la ficha 1 no llevan crédito.

El maestro dispondrá además de información sobre el porcentaje de elección de cada opción, por lo que la suma de estos porcentajes será mayor de 100. Esto permite que el maestro detecte cuáles son los divisores de 28 más identificados por los niños.

Se analiza a continuación una actividad que se focaliza en la importancia de uno de los términos de la división entera, el resto.

MAT2950 Pintando el rectángulo_división

5.º año



Juana hizo la tarea y llegó a la respuesta correcta con esta división:

$$\begin{array}{r} 47 \overline{) 5} \\ \underline{29} \end{array}$$

¿A qué conclusión llegó?

- A) Se puede pintar todo el rectángulo con 9 stickers azules.
- B) Se puede pintar exactamente el rectángulo con 2 stickers azules.
- C) No se puede pintar todo el rectángulo con 9 stickers azules porque quedan 2 cuadraditos en blanco.
- D) No se puede pintar exactamente el rectángulo con 9 stickers azules porque faltan 2 stickers azules más.

Dominio	Números
Contenido	Operaciones
Subcontenido	Adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.
Competencia	Comunicar
Aplicación	5to de Primaria
Objetivo	Reconocer el significado de los términos de una división entera aplicado a una situación.
Opciones	Justificación de las opciones
A	Reconoce el significado del cociente de la división. Posiblemente interpreta que el 9 del cociente corresponde a la cantidad de figuras azules que se necesitan sin tener en cuenta que no llega a cubrir todo el rectángulo blanco.
B	No reconoce el significado de los términos de la división entera. Asocia el 2 del resto con la cantidad de figuras que se necesitan para cubrir el rectángulo.

CLAVE	
C	Reconoce el significado de los términos de una división entera aplicado a una situación. Interpreta que el 9 del cociente corresponde a la cantidad de figuras azules enteras que se necesitan para cubrir parcialmente el rectángulo blanco y que el 2 del resto se asocia a la cantidad de cuadraditos del rectángulo que quedan sin cubrir.
D	Reconoce el significado del cociente de la división entera e interpreta con error el del resto. Posiblemente interpreta que el 9 del cociente corresponde a la cantidad de figuras azules enteras que se necesitan para cubrir parcialmente el rectángulo blanco pero considera con error que el 2 del resto corresponde a 2 figuras azules.

Esta actividad se propone para quinto año y pretende indagar en cómo interpretan los niños el significado de los términos de la división entera y las relaciones entre ellos. Tal como expresan Barba y Calvo (2010) el reconocimiento de las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto “son una fuente de regularidades que permiten derivar nuevos hechos a partir de otros conocidos.”(p. 47).

Importa tener presente que una misma división, puede dar lugar a distintas interpretaciones del resto y de la propia división, según el problema que resuelve y los distintos significados que adquiere, de ahí en parte la complejidad de la adquisición del concepto que va más allá de la operación en sí. Por ejemplo, a continuación se presentan cuatro situaciones⁵ que se resuelven con la misma división (25 dividido 6) sin embargo en cada una de ellas la respuesta es diferente:

Situación	respuesta
Queremos preparar ramos de seis flores cada uno y tenemos 25 flores para hacerlo. ¿Cuántos ramos podemos preparar?	4 ramos
La maestra quiere formar seis equipos con los 25 alumnos de su clase para hacer una actividad en el laboratorio de Ciencias. ¿De cuántos alumnos tiene que formar cada grupo?	5 equipos de 4 y uno de 5
Seis amigos salen a merendar y en el bar les cobran 25 €. ¿Cuánto deberá pagar cada uno?	4,17 euros cada uno
Para dar un paseo por el lago los 25 integrantes de una excursión Deben alquilar unas pequeñas barcas que admiten un máximo de 6 pasajeros. ¿Cuántas barcas deben alquilar?	5 barcas

Como plantean los autores, si la división involucrada fuera 25 dividido 5 todas las situaciones tendrían respuesta 5. Por lo que, en una división, si el resto no es cero, no solo importa el cociente.

Es así que, como sostiene Calvo (2020), para entender bien qué es la división es fundamental introducir el resto desde los primeros momentos, dándole sentido a partir del contexto de la situación y no postergar las divisiones de resto distinto de cero por considerarlas más difíciles. Las divisiones con resto distinto de cero son mucho más ricas porque permiten interpretar situaciones más realistas y porque es la semilla que se siembra para la comprensión de la divisibilidad.

En el caso concreto que se plantea en el ítem, no se puede cubrir todo el rectángulo con 9 stickers azules porque quedan 2 cuadraditos en blanco.

⁵ de: <https://puntmat.blogspot.com/search?q=El+residu+si+importa>

Aquellos niños que resuelven correctamente la situación reconocen el significado de los términos de la división entera en el contexto propuesto. Interpretan que el 9 del cociente corresponde a la cantidad de figuras azules enteras que se necesitan para cubrir parcialmente el rectángulo blanco y que el 2 del resto se asocia a la cantidad de cuadraditos del rectángulo que quedan sin cubrir.

Los niños que elijan las opciones A (Se puede cubrir todo el rectángulo con 9 figuras azules) o D (No se puede cubrir exactamente el rectángulo con 9 figuras azules porque faltan 2 figuras azules más) parecen reconocer el papel del cociente en la división entera, pero no el del resto. En el primer caso directamente no lo consideran relevante y solo reconocen el cociente como la respuesta a un “problema de división”. En el caso de la opción D reconocen que el resto tiene un papel en la resolución del problema, pero la interpretación no es acertada, quizás se relacione con que creen que la respuesta solo refiere al número de partes.

En el caso de aquellos que eligen la opción B (Se puede cubrir exactamente el rectángulo con 2 figuras azules) es probable que se focalicen en la división planteada y no consideren la situación a la que da respuesta.

En sintonía con este tipo de actividad, donde “el resto sí importa”, se encuentran actividades en los Cuadernos para hacer matemática de la CACEEM que podrían ser un complemento ideal para retomar en la post aplicación de la evaluación, a modo de ejemplo, *Reparto de chocolates, ¿Cómo funciona?* (del Cuaderno para hacer matemática en quinto, p. 22 y p. 55, respectivamente). También en el libro para el maestro de segundo ciclo (CACEEM, 2017) se trabajan los “problemas para analizar la modificación del resultado al variar los términos de una operación” (p.55) que aportan a la hora de comprender el significado de la división y la relación entre sus términos.

4.2 Rectángulo con cuadrados

A continuación se analizan dos actividades de la serie Rectángulo con cuadrados⁶ que requieren poner en juego una representación geométrica de la multiplicación y también remiten al significado de partición de las situaciones multiplicativas, pero asociados a organizaciones rectangulares.

MAT2948 Rectángulo con cuadrados_número

3.º y 4.º año

El juego de los rectángulos

Consiste en formar rectángulos "llenos" usando fichas cuadradas verdes de 1 unidad de lado.

Por ejemplo, con 6 fichas se podría hacer un rectángulo así:



Puedes probar aquí

Aunque solo tienes 20 fichas te puede ayudar a pensar.

Imagina que tienes **24 fichas** y debes usarlas todas para hacer un rectángulo "lleno".

Si en uno de los lados del rectángulo colocas **3 fichas**, ¿cuántas debes colocar en el otro lado?

- A) 6
- B) 7
- C) 8
- D) 12

Dominio	Números
Contenido	Operaciones
Subcontenido	Adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.
Competencia	Resolver problemas
Grado	3.º y 4.º año.
Objetivo	Resolver una situación que implica poner en juego una representación geométrica de la multiplicación.
Perfil de egreso 3º	Resolver situaciones de cálculo pensado, algorítmico, exacto, aproximado y con calculadora, utilizando estrategias personales o algorítmicos convencionales con números naturales.

⁶ Actividad inspirada en: <https://innovamat.com/blog/actividad-5-rectangulos-circulares/> donde encontrarán una versión completa y ampliada de la potencialidad de la propuesta.

Opciones	Justificación de las opciones
A	No interpreta correctamente la situación. Posiblemente atiende a que el rectángulo tiene 4 lados por lo que debe realizar $24:4=6$. No considera el dato que sobre un lado se colocan 3 fichas. No atiende que debe formar un rectángulo con 24 fichas, y responde con el mayor rectángulo de lado 3 que puede formar con las fichas de las que dispone en la animación (usa 18 de las 20).
B	No interpreta correctamente la situación. No atiende al dato de que debe armar un rectángulo con 24 fichas. Responde con la cantidad de filas que tienen alguna ficha de las 20 disponibles en la animación (6 filas completas y 1 incompleta).
C	CLAVE Asocia la situación con una multiplicación (representación geométrica). Posibles procedimientos: 1) Recupera el hecho numérico $8 \times 3 = 24$ 2) Identifica la relación entre la multiplicación y la división y realiza $24:8=3$ 3) Visualiza que con tres filas de 8 fichas se llega a 24 fichas en total. 4) Suma reiteradamente 8 hasta llegar a 24.
D	No interpreta correctamente la situación. Posiblemente atiende a que el rectángulo tiene pares de lados de distinta longitud por lo que debe realizar $24:2=12$. No considera el dato que sobre un lado se colocan 3 fichas.

Este ítem se propone para tercer y cuarto grado y aunque incluye la posibilidad de experimentar mediante un applet⁷, para obtener la respuesta es necesario realizar alguna inferencia dado que las fichas disponibles no son suficientes para encontrarla directamente a partir de la experimentación. Un ítem similar se propone para quinto y sexto año aunque en este caso se pregunta por la operación que permite llegar al resultado y no por el resultado en sí.

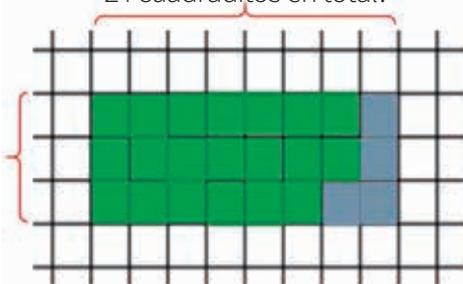
Es una actividad que favorece conexiones entre geometría y aritmética ya que para obtener la respuesta correcta el niño debe reconocer una organización rectangular y realizar algún cálculo, en este caso el aspecto geométrico funciona como contexto.

A continuación se analizan algunas de las variadas estrategias que se pueden seguir para llegar a la respuesta. La que más podría acercarse al uso del recurso manipulativo es comenzar a distribuir las fichas para luego inferir que para completar el rectángulo se requieren ocho columnas (o filas).

Algunos niños pueden realizar sumas sucesivas de 3 hasta llegar a 24 y asociar los ocho sumandos a las ocho columnas (filas) que se obtienen. Esta es la primera etapa en la construcción de los repertorios multiplicativos a partir de los aditivos. Eventualmente podría ir restando 3 de 24, y contar la cantidad de 3 que debe restar. (NAP 3, p.71).

⁷ <https://www.geogebra.org/m/arjswp69>

¿Cuántas fichas hay en este lado usando 24 cuadraditos en total?



lado de 3 fichas

El applet ofrece 20 fichas (en verde) y el niño deberá imaginar las 4 que faltan (en gris).

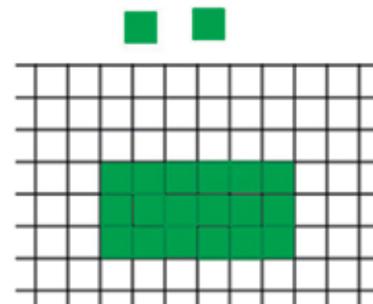
Otros estudiantes, luego de explorar con el applet, quizá puedan generalizar que multiplicando el número de “filas” por el de “columnas” obtienen el total de cuadraditos que usaron, por ejemplo que con 18 cuadraditos puede formarse un rectángulo de 3×6 , para luego recuperar de su repertorio multiplicativo, posiblemente a partir de la tabla del 3, que $3 \times 8 = 24$, identificando el 8 como el número de cuadraditos que corresponde al otro lado.

Finalmente otros niños pueden recurrir a la división, como operación inversa a la multiplicación y realizar $24:3=8$.

En la elección de las alternativas de respuesta se tuvieron en cuenta algunos errores que pueden surgir de la interpretación de las organizaciones rectangulares en relación a las situaciones multiplicativas. Se exponen a continuación algunas hipótesis que se consideraron que luego podrán ser contrastadas por el maestro en las instancias de retroalimentación y corrección colectiva.

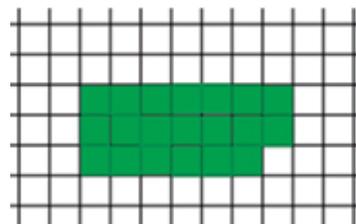
En el caso de los distractores, D (12) y A (6), pueden corresponder a no identificar la situación multiplicativa en la organización rectangular (ni explícita ni implícitamente) e intentar hacer cálculos con las fichas en base a hipótesis sobre la figura rectángulo. En ninguno de los dos casos se tiene en cuenta el dato de los 3 cuadraditos sobre un lado. Si el niño se apoya en la idea de que el rectángulo “tiene dos lados distintos” es posible que elija el 12, por ser el resultado de $24:2$. En el caso del 6 probablemente el razonamiento responda a considerar que el rectángulo tiene cuatro lados y por lo tanto hace el total de fichas dividido 4 para obtener la respuesta.

Otra hipótesis de error, en el caso que elijan 6 como respuesta, se relaciona con no considerar el dato de que debe usar 24 cuadraditos para formar el rectángulo con un lado de 3, y quedarse con el mayor rectángulo con un lado 3 que puede armar si dispone de 20 cuadraditos. En este caso sí comprende las organizaciones rectangulares, respondiendo a partir de la experimentación pero no considera todos los datos de la situación.



La respuesta que podría considerarse de menor logro es la opción B (7) que refleja el no reconocimiento de la organización rectangular ni de los datos del problema. Podría corresponder a una respuesta basada en una manipulación sin una posterior reflexión del resultado en relación a los datos del problema.

Ante la situación de usar las 20 fichas disponibles en columnas (filas) de 3, cuenta las 7 columnas en las que pudo colocar alguna ficha aunque no todas hayan quedado completas.



Considerando el potencial formativo de la actividad, se podría continuar avanzando en la exploración y discusión sobre otras organizaciones rectangulares que se pueden construir con las 24 fichas.

El applet permite hacer esta exploración para los números hasta 20, ya que el máximo de fichas disponibles es 20. En el vínculo que se adjunta⁸ se incluye un recortable para uso en el aula que proporciona un material manipulativo físico, para explorar con más fichas. Estas herramientas son un medio que contribuyen a la formación de la idea de divisores (factores) de un número y así avanzar en las relaciones entre las situaciones multiplicativas y la divisibilidad.

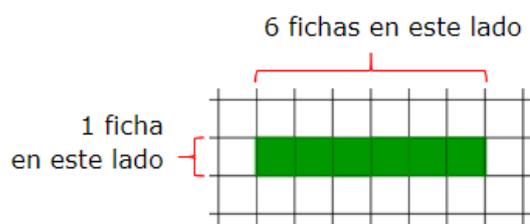
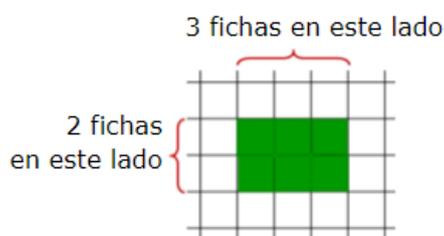
Posiblemente la actividad *Rectángulo con cuadrados_operación*, que se propone en 5to y 6to, habilite que algún estudiante lo asocie al cálculo de áreas. De este modo la actividad queda enmarcada en los problemas de producto de medidas en los que intervienen tres magnitudes, en este caso ancho, largo y área de un rectángulo (NAP 6, p. 64-65), aunque en el contexto que está propuesto esto aparece en forma implícita.

⁸ <https://drive.google.com/file/d/1jV-3aow0gAUz0YWPHeFAyRnSeLy70X48/view?pli=1>

El juego de los rectángulos

Consiste en formar rectángulos "llenos" usando fichas cuadradas verdes de 1 unidad de lado.

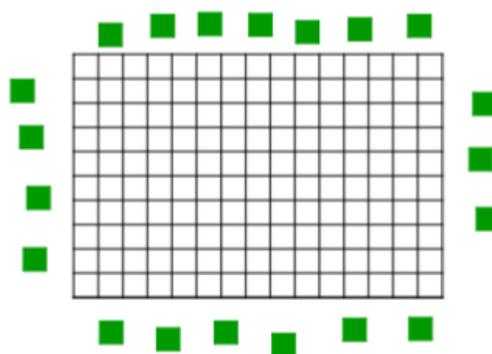
Por ejemplo, con 6 fichas se pueden hacer dos rectángulos distintos:



Si Rocío tiene 30 fichas y Luis 39, ¿quién puede hacer más rectángulos distintos usando todas sus fichas?

Aunque las fichas no te van a alcanzar, puede ayudarte a pensar la respuesta probar aquí 

Cada rectángulo que forme Rocío debe tener 30 fichas y cada rectángulo que forme Luis debe tener 39 fichas.



- A) Rocío, porque tiene un número par de fichas.
- B) Rocío, porque hay más multiplicaciones que dan 30 que las que dan 39.
- C) Luis, porque hay más multiplicaciones que dan 39 que las que dan 30.
- D) Luis, porque tiene más fichas.

Dominio	Números
Contenido	Operaciones
Subcontenido	Adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.
Competencia	Resolver problemas
Grado	6.º año
Objetivo	Reconocer un argumento que implica identificar el número de descomposiciones de un natural como producto de dos factores.
Perfil de egreso 6º	Usar descomposiciones aditivas y multiplicativas en la resolución de distintas situaciones

Opciones	Justificación de las opciones
A	No reconoce el argumento correcto. No analiza las posibles multiplicaciones que tienen como resultado 30 o 39, asocia número mayor con más cantidad de rectángulos (descomposiciones).
B	CLAVE Reconoce el argumento correcto. Posiblemente analice varias multiplicaciones que den como resultado 30 y 39 y concluya que obtiene más opciones con resultado 30. Posibles procedimientos: 1) Obtiene todas las descomposiciones de 30 (30x1, 15x2, 10x3, 6x5) y 39 (39x1, 13x3) y compara las cantidades. 2) Identifica las dos descomposiciones posibles del 39 y reconoce que 30 tiene más descomposiciones posibles (aunque no las halle todas).
C	No reconoce el argumento correcto. Posiblemente interprete que un número más grande es el resultado de más multiplicaciones.
D	No reconoce el argumento correcto. Quizás considere que hay más posibilidades de obtener los números pares como producto de multiplicaciones que los impares.

Esta segunda propuesta enmarcada dentro de la serie *Rectángulo con cuadrados*, destinada para sexto año, tiene como objetivo que el niño reflexione sobre las posibles factorizaciones de un número natural en dos factores, a partir de la experimentación con una organización rectangular. Debe tener en cuenta que se deben usar todas las fichas cada vez, de lo contrario otra sería la conclusión.

El formato del ítem requiere que el niño identifique el argumento correcto. Importa señalar que en las opciones B (Rocío, porque hay más multiplicaciones que dan 30 que las que dan 39.) y C (Luis, porque hay más multiplicaciones que dan 39 que las que dan 30.) propuestas, se explicita la vinculación entre las “organizaciones rectangulares” y la multiplicación.

Cuenta con el mismo applet⁹ que *Rectángulo con cuadrados_número* (3ero y 4to) y *Rectángulo con cuadrados_operación* (5to y 6to) y se incluye también con el objetivo exploratorio ya que no se puede encontrar la respuesta por simple prueba y conteo porque no tiene suficiente cantidad de fichas. La idea es que el niño pruebe con otros números de fichas, para poder realizar algunas conjeturas que le permitan identificar el argumento correcto. Una posible estrategia podría ser usar 15 fichas y ver que puede formar un rectángulo de 3x5 y luego imaginar que con dos de esos rectángulos puede formar uno de 6x5 o uno de 3x10 obteniendo rectángulos de 30 fichas en total. También puede razonar que con 10 fichas se puede hacer un rectángulo de 2x5 y que con tres de esos rectángulos puede hacer uno de 2x15 o el de 6x5 (igual al que obtuvo antes). De este modo puede observar que con 30 fichas está logrando al menos 3 rectángulos distintos.

Para el caso de las 39 fichas, al no poder trabajar con la mitad de las fichas, quizás intente trabajar con un tercio de ellas (13). Al investigar qué rectángulos puede formar con 13 fichas debería concluir que solo puede hacer uno de 13x1 y que con tres de estos puede formar uno de 13x3 o uno de 39x1, cómo únicas alternativas posibles. De este modo puede concluir que con 39 fichas solo se pueden formar 2 rectángulos distintos.

⁹ <https://www.geogebra.org/m/arjswp69>

Puede ser también que los estudiantes no recurran al recurso manipulativo y reconozcan que deben identificar las multiplicaciones de dos factores que tienen resultado 30 y compararlas con las que tienen resultado 39. En el caso del 30 estos productos pueden surgir con cierta naturalidad al recuperar el 30 como presente en varias tablas de multiplicar (del 3, 5 y 6). También es posible que algunos estudiantes encuentren fácilmente que 39 tiene menos posibilidades de descomposición que el 30 y no necesite hallar todas las de este número para abordar la respuesta correcta, opción B (Rocío, porque hay más multiplicaciones que dan 30 que las que dan 39).

La opción A (Rocío, porque tiene un número par de fichas), si bien “Rocío” es la respuesta correcta, el argumento no es válido. Aquí considera que obtiene mayor cantidad de rectángulos, por ser el 30 un número par. Posiblemente los números pares sean más “amigables” a la hora de operar con ellos o por la idea previa de que si es posible dividir un número entre dos, será posible dividirlo en otra cantidad de partes. Una forma de mostrar que este argumento no es válido es a través de un contraejemplo, considerando los números 45 y 46 y mostrando que 45 se puede escribir como 3×15 ; 5×9 y 1×45 mientras que 46 solo se puede escribir como 2×23 y 1×46 .

La opción C (Luis, porque hay más multiplicaciones que dan 39 que las que dan 30.) si bien elige un argumento expresado en términos matemáticos se apega a la idea previa de que el número de factores de un número aumenta si el número es mayor.

En cuanto a la opción D (Luis, porque tiene más fichas), si bien está relacionada con la idea subyacente de la C, es la de menor logro ya que solo asocia “más fichas entonces más opciones” sin llegar a reconocer el vínculo implícito con la multiplicación.

En el Cuaderno para hacer matemática en sexto (p.24) la actividad *Tablero lleno* también ofrece, en un contexto lúdico, la oportunidad de trabajar con la factorización de un número natural.

Este tipo de actividad es rica, al igual que las actividades anteriores, para que en la etapa de retroalimentación se retomen en clase. Pueden dar lugar a jugar con otros números y recorrer los repertorios multiplicativos, sea con diferentes recursos, applets, material manipulativo, tabla pitagórica, etc. La elaboración de conjeturas a medida que se practica el tema, para ir las validando o descartando quizás reformulando puede colaborar en el proceso de conceptualización de la noción de divisor de un número y sus relaciones con el de múltiplo en el marco de las situaciones multiplicativas.



5. Referencias bibliográficas

ANEP (2013) Programa de Educación Inicial y Primaria. Año 2008. Tercera edición. Disponible en http://www.ceip.edu.uy/documentos/normativa/programaescolar/ProgramaEscolar_14-6.pdf

ANEP-CEIP (2016), *Documento Base de Análisis Curricular*. Montevideo, Tercera Edición.

ANEP-CEIP, CACEEM (2016), Cuadernos para Hacer Matemática en Segundo y en Tercero.

ANEP-CEIP, CACEEM (2016), *Matemática en el Primer Ciclo. Libro para el maestro*. ISBN: 978-9974-677-75-3

ANEP-CEIP, CACEEM (2017), *Cuadernos para Hacer Matemática en Cuarto, en Quinto y en Sexto*.

ANEP-CEIP, CACEEM (2017), *Matemática en el Segundo Ciclo. Libro para el maestro*. ISBN: 978-9974-677-90-6

BARBA D., CALVO C., (2017). Artículo Tareas ricas para clasificar y describir figuras Revista Suma. Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, ISSN 1130-488X, N° 86, 2017, págs. 83-88

Barba, D, y Calvo, C. (2014); Algunas actividades para hablar de divisibilidad. Revista Suma+ n°76, pp. 91-98. FESPM. Julio 2014. Recuperado de: <http://puntmat.blogspot.com/p/publicacions.html>.

Calvo, C. (2020) Sesión 8. De las operaciones multiplicativas a la divisibilidad.

Calvo, C., & Barba, D. (2010). La división: mucho más que un algoritmo. Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 17(54), 41-54.

Fripp, A.; Varela, C. (2012) Pensar geoméricamente. Ideas para desarrollar el trabajo en el aula. Montevideo: Grupo Magró Editores. ISBN: 978-9974-677-79-1

ITZCOVICH, Horacio (coord.) (2008): *La Matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor. Colección. Cap. 6

Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. NAP. (2006). Disponible en: <https://blogedprimaria.blogspot.com/2016/05/nap-matematica.html>

Rodríguez Rava, B (2011). Directores: Espacio de reflexión compartida. Notas de trabajo 5. Instituto universitario Claeh. Disponible en <https://uruguayeduca.anep.edu.uy/sites/default/files/2017-05/La%20ense%3%blanza%20de%20la%20geometr%3%ada.%20Tipos%20de%20actividades.pdf>

Rodríguez Rava, B. (2015). *Algunas reflexiones sobre la enseñanza de la Geometría en la escuela primaria*. Revista Quehacer Educativo. p. 12-19

SADOVSKY, Patricia (s/f). Explicar en la clase de Matemáticas, un desafío que los niños enfrentan con placer. Disponible en: <https://docplayer.es/22733096->

Vergnaud, G. (1991). El Niño, Las Matemáticas Y La Realidad. Problemas De La Enseñanza De Las Matemáticas En La Escuela Primaria. Trillas Editorial. Cap. 11

VERGNAUD, Gérard (1990). *La teoría de los campos conceptuales* en Recherches en Didactique des Mathématiques, 10/2.3. pp. 133-170. Traducción de Juan D. Godino.



ANEP

CONSEJO
DIRECTIVO
CENTRAL

DIRECCIÓN EJECUTIVA
DE POLÍTICAS
EDUCATIVAS

DIRECCIÓN SECTORIAL
DE PLANIFICACIÓN
EDUCATIVA