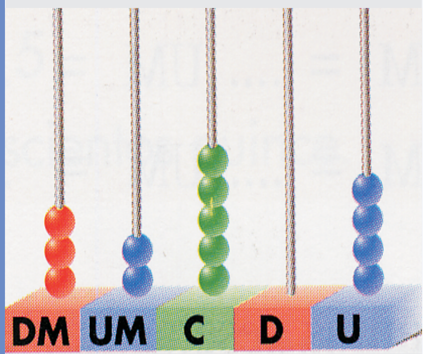
Manual para el Estudiante

Edición Octubre 2002

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

SISTEMAS NUMÉRICOS Y SU DIDÁCTICA PARA MAESTROS



Eva Cid
Juan D. Godino
Carmen Batanero

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

SISTEMAS NUMÉRICOS Y SU DIDÁCTICA PARA MAESTROS

Eva Cid
Juan D. Godino
Carmen Batanero

SISTEMAS NUMÉRICOS Y SU DIDÁCTICA PARA MAESTROS

Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada
18071 Granada

ISBN: 84-932510-4-6
Depósito Legal: GR-186-2003

Impresión: ReproDigital. Facultad de Ciencias
Avda. Fuentenueva s/n. 18071 Granada.

Distribución en Internet:
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Publicación realizada en el marco del Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología, BSO2002-02452.

Índice

CAPÍTULO 1:
NÚMEROS NATURALES. SISTEMAS DE NUMERACIÓN Página

CAPÍTULO 2:
ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

A: Contextualización profesional

B: Conocimientos matemáticos

B: Conocimientos matemáticos Página

Página

Página

SISTEMAS NUMÉRICOS Y SU DIDÁCTICA PARA MAESTROS

Capítulo 1:

NÚMEROS NATURALES. SISTEMAS DE NUMERACIÓN

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE NUMERACIÓN EN PRIMARIA

Consigna:

A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

a) Resuelve los problemas propuestos.
b) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
c) Identifica diferencias y semejanzas entre los distintos problemas.
d) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
e) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
f) Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

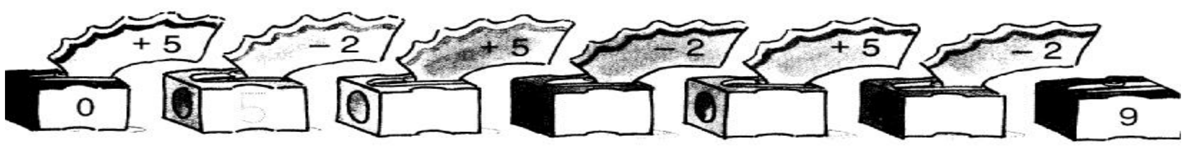
1. ¿Qué números faltan en cada serie? Escríbelos:

	5	4	3	2	
6		4		2	
	2		4	5	
		4		2	1

2. Marca estos números en la recta numérica: 6, 12, 5, 3, 9, 7, 2

+——+——+——+——+——+——+——+——+——+——+——+——+——+——
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

3. Continua la serie:



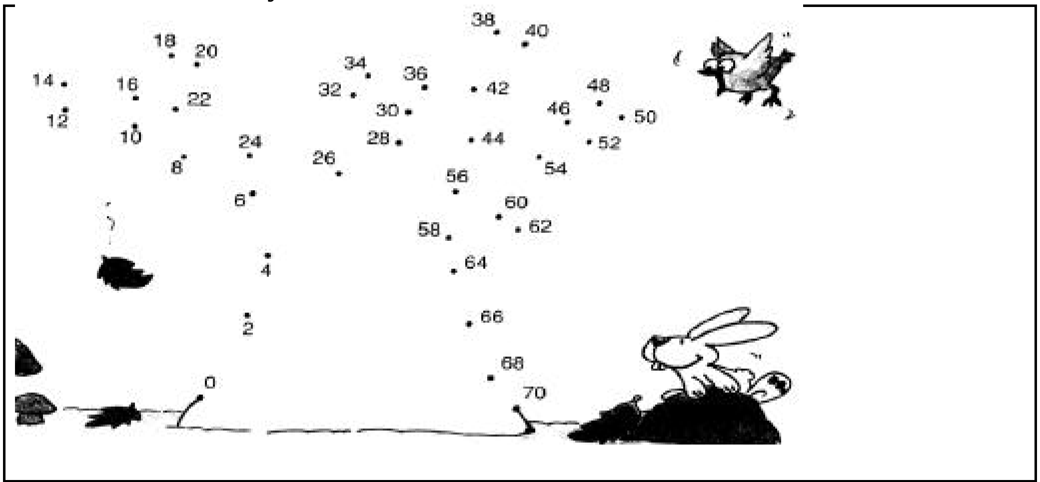
4. Completa con el signo adecuado: Mayor que > menor que < igual que =

13____5	5____18	22___28	13___13	27___16	26___14	20___20	18___21

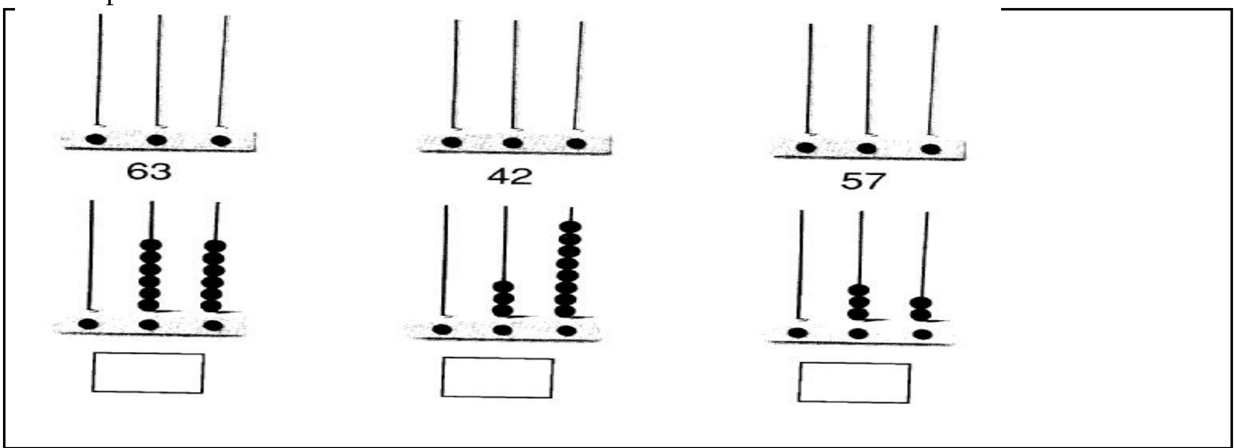
5. Ordena estos números de mayor a menor: 23, 7, 18, 4, 2, 28, 37

6. Continúa las series:
0, 5, 10,...
60, 63, 66,...
99, 97, 95,...
90, 80,...

7. Une los números y colorea:



8. Completa:



9. Representa en un ábaco el número 275. ¿Cuál es la cifra de las unidades? ¿Cuál es la cifra de las decenas? ¿Cuántas unidades vale? ¿Cuál es la cifra de las centenas? ¿Cuántas unidades vale?

10. Escribe cinco números mayores que 240 y menores que 250. Escribe tres números entre 7600 y 8000.

11 ¿Entre qué decenas se encuentran estos números? 138, 73, 47, 219, 444, 576.

12. Haz la descomposición polinómica de estos números: a) 37.248; b) 35.724; c) 12.743; d) 5.869.

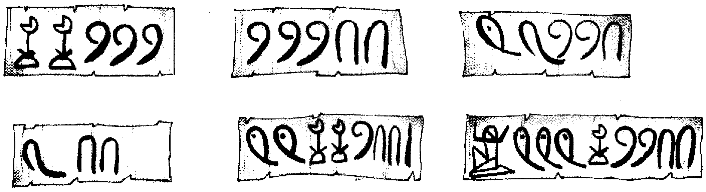
13. Haz la descomposición de 12 en dos sumandos que sean números naturales de todas las formas posibles. Para cada descomposición haz el producto de los sumandos. ¿Qué descomposición de 12 da el producto máximo?

14. Una máquina automática de despacho de billetes de tren admite monedas de 1, 5, 25, y 100 pts. Calcula el número mínimo de monedas necesario para pagar 3.242 pts; 1.587 pts; 4.287 pts.

15. Escribe con números romanos: 13, 27, 18, 70, 223, 617, 45, 3000.

16. Aproxima estos números a la decena de millar más próxima: 31794, 48076, 9.340, 20.250.

17. Escribe qué número indica cada una de estas tablas:



18. Escribe con símbolos egipcios los siguientes números:

200 625 1250

B: Conocimientos Matemáticos

1.TÉCNICAS DE RECUENTO

1.1. Situación introductoria: Instrumentos para contar

Toma un folio y divídelo en dos partes iguales. Escribe tu nombre en cada mitad. En una de ella simula la caída de una "granizada" durante unos 30 segundos, marcando con puntos gruesos la posición en la que caen los granizos. Obtendrás un dibujo parecido al que mostramos en este cuadro:

```
    *         *      *   *
*     *        *            *
 *    *   *          *   *
   *    ** *      *   *
     *               *
* *        *         *
     *     *     *     *
 *    *   *       *     *
   *          *     *
*    *        *  *          *
```

a) ¿Cuántos puntos hay en tu dibujo? ¿Qué has hecho para contestar a esta pregunta?
b) En la otra mitad del folio escribe un mensaje para que otro compañero reproduzca exactamente la misma cantidad de granizos que tú has producido, aunque no en la misma posición. No puedes utilizar las palabras uno, dos, tres,..; ni los símbolos 1, 2, 3,...
c) Intercambia el mensaje con el de otro compañero; cada uno de vosotros ha de interpretar el mensaje del compañero y reproducir su granizada.
d) Comprueba que la reproducción ha sido correcta.
e) Describe el procedimiento que habéis utilizado en la realización de la tarea.

1.2. Necesidades sociales que resuelven las técnicas de contar

Las técnicas de contar son universales, y se han encontrado en todas las sociedades estudiadas hasta ahora. Estas técnicas han dado origen al concepto de *número* y a la Aritmética. Surgen ligadas a la necesidad de:

- comunicar información referente al tamaño (la numerosidad) de las colecciones de objetos (*cardinal* de la colección).
- indicar el lugar que ocupa o debe ocupar un objeto dentro de una colección ordenada de objetos (*ordinal* del objeto).

En las sociedades prehistóricas -cazadores y recolectores- se plantea ya, aunque sea a pequeña escala, la necesidad de responder a la pregunta, ¿cuántos hay? o ¿cuántos son?. También aparece la necesidad de establecer un orden de actuación: ¿qué se hace primero?, ¿quién interviene en segundo lugar?, etc.

A partir de esas necesidades sociales se desarrollan diferentes técnicas de recuento que han ido evolucionando a lo largo de la historia. En nuestra sociedad se utiliza predominantemente una técnica de recuento con palabras, aun cuando se conservan vestigios de otras varias técnicas.

Cada colección de "objetos numéricos" vamos a llamarla "sistema numeral" o sistema de representación numérica. El hecho de que dos colecciones de objetos sean coordinables se expresa diciendo que representan el mismo *número*. De este modo los números no son objetos como pueden ser una mesa, un perro, etc.; se dice que son "objetos ideales" o abstractos. En definitiva, interesa considerarlos como "maneras de hablar" ante ciertas situaciones en las que reflexionamos sobre las actividades de recuento y ordenación y los instrumentos que usamos para esas actividades.

1.3. Técnica de recuento para obtener cardinales

Las técnicas de recuento actuales se basan en la existencia de unas palabras (numéricas) que se recitan siempre en el mismo orden. Estas palabras forman un conjunto bien ordenado (hay un primer elemento y un siguiente para cada una de ellas). Para obtener el cardinal de un conjunto se realizan las siguientes acciones:

- Se adjudica a cada elemento del conjunto contado una palabra numérica distinta y sólo una en el orden habitual: uno, dos, tres,..., treinta.
- Una vez acabada la fase anterior, la palabra adjudicada al último elemento del conjunto contado, se repite, haciendo referencia con ella a toda la colección (treinta) y designando el número de elementos o *cardinal* del conjunto.

Observamos que podemos contar (hallar el cardinal de un conjunto) porque nos sabemos de memoria una sucesión ordenada de palabras: uno, dos, tres, etc, y las recitamos siempre en el mismo orden. La tarea más complicada de los recuentos consiste en adjudicar a cada objeto del conjunto una palabra numérica distinta y sólo una. Ello requiere definir un orden total en el conjunto contado, orden que podemos definir a voluntad, sin que se modifique el resultado final. Para contar se requiere una coordinación entre la palabra y la mano o la vista, y a veces, se usan técnicas auxiliares, marcando, por ejemplo, cada punto contado. Al terminar de contar, la última palabra, hace referencia, no sólo al último objeto señalado, sino también a todo el conjunto, esto es, se trata de una "propiedad" que se predica de todo el conjunto. Por tanto, cada palabra numérica que se pronuncia tiene un doble significado: es el ordinal del elemento correspondiente en la ordenación que se va construyendo, y es el cardinal del conjunto formado por los objetos ya contados hasta ese momento.

Hay que tener en cuenta también el *uso intransitivo* del recuento, esto es, el recitado de la serie de palabras numéricas en sí mismas, sin mención alguna a cardinales u ordinales. Aprender las palabras numéricas y cómo repetirlas en el orden correcto es aprender el recuento intransitivo, mientras que aprender su uso como medidas de conjuntos es el aprendizaje del recuento transitivo. "Si aprendemos un tipo de recuento antes que otro no tiene importancia cuando nos interesan los primeros números. Pero lo que es seguro, y no carente de importancia, es que tenemos que aprender algún procedimiento recursivo para generar la *notación* en el orden adecuado antes que hayamos aprendido a contar transitivamente, ya que hacer esto consiste, bien directa o indirectamente, en correlacionar los elementos de la serie numérica, con los miembros del conjunto que estamos contando. Parece, por tanto, que es posible que alguien aprenda a contar intransivamente, sin aprender a contar transitivamente. Pero no a la inversa" (Benacerraff[1], 1983: 275)

[1] Benacerraf, P. (1983). What numbers could not be. En, P. Benacerraf y H. Putnam (Eds), *Philosophy of mathematics. Selected reading*, 2nd edition (pp. 272-294). Cambridge: Cambridge University Press.

Técnicas auxiliares del recuento

Cuando estamos contando los elementos de un conjunto, necesitamos distinguir en cada paso el subconjunto ya contado, del no contado. Las técnicas auxiliares que se utilizan son:

- Trazar mental o físicamente un camino a seguir cuando vamos contando los objetos.
- Marcar los objetos ya contados.
- Separar manual o mentalmente los objetos contados de los no contados (realizar una partición del conjunto).
- Sustituir la colección de partida por otra que tenga el mismo cardinal, contando esta última.

El uso de una u otra técnica auxiliar depende de:

- el número de elementos del conjunto contado;
- la configuración geométrica del conjunto;
- el tipo de objetos que constituyen el conjunto contado;
- la accesibilidad de los elementos del conjunto (objetos físicos al alcance de la mano, objetos físicos al alcance de la vista pero no de la mano, objetos evocados mentalmente).
- la movilidad de los objetos.

Todas estas técnicas auxiliares tienen que ir precedidas de una primera coordinación entre la mano o la vista y la emisión de la palabra. Es decir, hay que aprender a emitir cada palabra al mismo tiempo que la atención se fija en un objeto.

Coordinabilidad entre conjuntos

Al contar ponemos en correspondencia cada elemento de un conjunto con otro conjunto (de objetos, palabras, muescas, etc.). Las noción de cardinal se puede formalizar usando el lenguaje de la teoría de conjuntos.

Definición 1(Coordinabilidad): Un conjunto A coordinable o equipotente con el conjunto B si existe una correspondencia biyectiva de A en B. Se escribe $A \sim B$. Cada elemento del primer conjunto se pone en correspondencia con uno y sólo uno del segundo.

Definición 2 (Conjunto infinito): A es un conjunto infinito si existe un subconjunto propio B de A que sea coordinable con A, o sea, $\exists\, f : A \rightarrow B$, biyectiva.

Ejemplo: El conjunto de números pares es infinito, porque podemos ponerlo en correspondencia biyectiva con el conjunto de números múltiplos de 10. Así:

$$2 \leftrightarrow 20$$
$$3 \leftrightarrow 30$$
$$4 \leftrightarrow 40$$

y siguiendo de esta forma por cada número par hay uno y sólo un múltiplo de 10, pero por otro lado el conjunto de múltiplos de 10 es un subconjunto de los números pares.

Si un conjunto no es infinito se dice que es finito. En los conjuntos finitos no es posible que uno de sus subconjuntos sea coordinable con todo el conjunto.

Proposición 1: La relación de coordinabilidad es una relación de equivalencia en el conjunto de los conjuntos finitos, o sea, cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Proposición 2: Todos los conjuntos coordinables entre si tienen el mismo cardinal. Todos estos conjuntos son equivalentes, desde el punto de vista de tener el mismo cardinal y decimos que forman una *clase de equivalencia.*

1.4. Técnicas de recuento para obtener ordinales

Para obtener el ordinal de un elemento se utiliza la sucesión de palabras: uno, dos, tres, ... o la sucesión de palabras: primero, segundo, tercero, etc. que llamamos "palabras numéricas ordinales". El resultado del recuento se expresa indistintamente mediante unas u otras palabras. Se dice de un elemento que es el décimo quinto o que es el quince. A medida que se avanza en la sucesión de palabras numéricas se utilizan cada vez menos las palabras ordinales.

Dado un conjunto totalmente ordenado y un elemento de dicho conjunto, podemos usar diversas técnica para determinar el número ordinal:

- Se recita una de las sucesiones de palabras numéricas (ordinales o cardinales)
- Se adjudican dichas palabras a los elementos del conjunto siguiendo el orden establecido hasta llegar al elemento en cuestión.
- La palabra que le corresponde a dicho elemento es su ordinal.

Como podemos ver, a diferencia de lo que sucede en la determinación de cardinales, para asignar un ordinal, el orden en que se van eligiendo los elementos ya no queda a discreción del que efectúa el recuento, sino que viene fijado de antemano.

Para obtener el ordinal de un elemento no es absolutamente necesario tener previamente definido un orden total en el conjunto, sino que basta con saber qué elementos son anteriores al que nos interesa. En ese caso tenemos esta segunda técnica:

- Se obtiene el cardinal del conjunto formado por todos los elementos anteriores al que nos interesa, utilizando la técnica de recuento correspondiente.
- Pronunciamos la palabra numérica siguiente a la que se refiere el cardinal de dicho conjunto, indicando con ella el ordinal del elemento.

Esta segunda técnica permite reordenar a voluntad el conjunto de los elementos anteriores al dado, puesto que para calcular cardinales el orden en que se elijan los elementos es irrelevante.

1.5. Orden de ordinales y cardinales

Decimos que un ordinal es ‘anterior’ a otro si al recitar la sucesión numérica en el orden habitual, la palabra numérica correspondiente al primer ordinal se recita antes que la correspondiente al segundo ordinal. Por ejemplo, el ordinal ‘cuatro’ es anterior al ordinal ‘nueve’ porque, a la hora de contar, la palabra ‘cuatro’ se dice antes que la palabra ‘nueve’, la primera palabra es anterior en el tiempo a la segunda.

Decimos que un cardinal es ‘más pequeño’ que otro, o ‘es menor’ que otro, si al emparejar los elementos de dos conjuntos que los tengan por cardinales respectivos, en el segundo conjunto quedan elementos sin pareja. Por ejemplo, el cardinal ‘cuatro’ es más pequeño, o menor, que el cardinal ‘nueve’ porque si emparejamos cuatro tazas con nueve platos quedarán platos sin taza. Esta última definición lleva implícita la idea de que todos los conjuntos que tienen el mismo cardinal pueden emparejarse sin que quede ningún elemento sin pareja.

Estos dos órdenes, el ordinal y el cardinal, son equivalentes, es decir, que si un ordinal es anterior a otro los cardinales correspondientes a esas mismas palabras numéricas cumplen que el primero es más pequeño que el segundo; y recíprocamente. En general, decimos que el número *a* 'es menor' que *b*, entendiendo que eso significa que el ordinal *a* es anterior al ordinal *b* y que, al mismo tiempo, el cardinal *a* es más pequeño que el cardinal *b*.

1.6. Principios que subyacen en las técnicas de contar

El análisis de las diversas técnicas de contar pone de manifiesto los principios que subyacen en ellas, es decir, los aspectos conceptuales que es necesario entender y tener en cuenta para contar correctamente. En el caso de la técnica de contar para obtener cardinales son los siguientes:

- *Principio del orden estable*. Las palabras numéricas uno, dos, tres, ... deben recitarse siempre en el mismo orden, sin saltarse ninguna.
- *Principio de la correspondencia uno a uno*. A cada elemento del conjunto sometido a recuento se le debe asignar una palabra numérica distinta y sólo una.
- *Principio de irrelevancia del orden*. El orden en que se cuentan los elementos del conjunto es irrelevante para obtener el cardinal del conjunto.
- *Principio cardinal*. La palabra adjudicada al último elemento contado del conjunto representa, no sólo el ordinal de ese elemento, sino también el cardinal del conjunto.

En el caso de la técnica de contar para obtener ordinales los principios que la dirigen son el del orden estable y el de la correspondencia uno a uno referido únicamente al propio elemento y a los anteriores a él. Aquí el orden en que sean elegidos los elementos del conjunto para adjudicarles las palabras numéricas ya no es irrelevante de cara a la obtención del ordinal correspondiente.

1.7. Otras técnicas de recuento: ejemplos históricos[2]

Hasta ahora hemos visto que para contar se necesitan unas palabras numéricas, pero, ¿estas palabras han existido siempre? ¿Existen técnicas de recuento que no se basen en palabras? A continuación mostraremos cómo han resuelto diferentes culturas el problema de responder a la pregunta, ¿cuántos hay?

En primer lugar, el hombre tiene una capacidad innata para reconocer ciertos cardinales de conjuntos sin necesidad de efectuar un recuento. Esta capacidad recibe el nombre de "subitación" y permite reconocer cardinales de conjuntos con un número pequeño de objetos, por lo que algunas culturas comunican mediante el lenguaje cuál es el cardinal de un conjunto, aunque no tengan técnicas de contar, por ejemplo:

- En algunas sociedades, como los zulúes y pigmeos de Africa, los arandan y kamilarai de Australia, los bocotudos de Brasil y los aborígenes de las islas Murria, sólo se han inventado las dos primeras palabras numéricas: una para indicar la unidad, otra para indicar la pareja.
- Varias tribus de Oceanía declinan los nombres de las cosas en singular, dual, trial, cuatrial, plural, del mismo modo que nosotros declinamos los nombres en singular y plural. Tienen, por tanto, la posibilidad de indicar el cardinal de un conjunto de hasta cuatro objetos pero no tienen palabras para contar.

[2] Esta información de tipo histórico procede de Ifrah (1985) libro cuya lectura se recomienda.

En segundo lugar, muchas sociedades han desarrollado técnicas de contar sin palabras, que han llegado hasta nuestros días. Por ejemplo: llevar la cuenta de los votos a favor y en contra trazando palotes, mostrar los dedos para indicar un cardinal u ordinal (esta técnica se utiliza mucho con los niños pequeños), utilizar palillos, trozos de papel o fichas para llevar la cuenta de las partidas ganadas en un juego de cartas, pasar con los dedos las bolitas del rosario para llevar la cuenta de las avemarías, utilización de ábacos en las escuelas, etc. En nuestra cultura estas técnicas se mezclan con las técnicas de recuento con palabras, que son las predominantes, y, frecuentemente, sirven de refuerzo a estas últimas. Sin embargo, existen y han existido sociedades en las que las técnicas de recuento sin palabras eran muy importantes e incluso, las únicas existentes. Algunos ejemplos son los siguientes:

- Los papúes de Nueva Guinea y los bosquimanos de Africa del Sur, entre otros muchos aborígenes, cuentan utilizando las partes del cuerpo humano. Para ello y en un orden previamente establecido van señalando los dedos de las manos y de los pies, las diferentes articulaciones del cuerpo, los ojos, nariz, boca, etc.
- Ha sido una práctica frecuente en los ejércitos de diferentes épocas y sociedades que, antes de entrar en batalla, cada guerrero depositara un guijarro en un lugar convenido. A la vuelta cada guerrero recogía uno de dichos guijarros. Los sobrantes indicaban el número de bajas que se habían producido en la batalla. La utilización de guijarros para contar o realizar operaciones ha dado lugar a la palabra "cálculo" que proviene de la palabra latina "calculus" que significa "piedra pequeña".

Tenemos así un muestrario de objetos físicos que sirven como objetos numéricos y que podemos clasificar en:

- muescas, palotes;
- objetos ensartados en collares o en varillas, nudos en una cuerda;
- objetos sueltos: guijarros, palitos, conchas, perlas, huesos, etc.
- partes del cuerpo humano.

Ejercicios:

1. Si un pastor trashumante tuviese que contar 999999 cabezas de ganado, ¿Cuánto tiempo tardaría, haciendo una muesca por segundo?

En conclusión, una técnica de recuento sin palabras se caracteriza por la existencia de un conjunto de *objetos numéricos*, que sirven para contar. A cada elemento del conjunto contado se le asocia un objeto numérico distinto y sólo uno, construyendo un subconjunto de objetos numéricos, cuya presentación es la respuesta a la pregunta, *¿cuántos hay?* Esto pone de manifiesto que lo que subyace en un recuento, la parte común a todos ellos, es el establecimiento de una correspondencia uno a uno entre el conjunto contado y un subconjunto numérico de referencia, tanto si los elementos de este último son objetos físicos, palabras, partes del cuerpo humano, etc. El conjunto de objetos numéricos debe estar "naturalmente estructurado", y constituye lo que llamaremos un "sistema numeral" o sistema de representación numérica.

1.8. El paso del recuento sin palabras al recuento con palabras

Las etapas necesarias para pasar de una técnica de recuento con objetos al recuento con palabras son las siguientes:

- Comparar el conjunto que se quiere contar con un conjunto de referencia, formado por objetos visibles o evocables por los demás. El principio de la correspondencia uno a uno permite pasar de una comunicación poco precisa del cardinal de una colección a una comunicación precisa de la misma, representándola mediante un conjunto de los objetos numéricos (muescas, guijarros, cuentas, etc.).

- Comparar con un conjunto de referencia ordenado (partes del cuerpo humano, objetos diferenciados) para poder establecer el ordinal de cada elemento dentro de un conjunto. La presentación sucesiva de los objetos diferenciados siempre en el mismo orden, principio del orden estable, permite comunicar el ordinal de un elemento.
- Utilización indistinta de los conjuntos de referencia ordenados para la obtención de cardinales u ordinales. Cada uno de los objetos numéricos, al estar diferenciado de los demás, puede recibir un nombre distinto.
- Descubrimiento de que basta nombrar el último elemento del conjunto numérico ordenado con el que se ha establecido la correspondencia uno a uno para transmitir la información deseada, tanto en contextos cardinales como ordinales: principio cardinal.

En un momento dado, algunas sociedades se dan cuenta de que al usar un conjunto numérico ordenado, ya no es necesario presentar al interlocutor todo el conjunto con el que se ha establecido la correspondencia, ni enumerarlo. Con hacer referencia al último objeto es suficiente pues el interlocutor puede evocar todos los elementos anteriores.

No todas las culturas han sido capaces de llegar a este punto. Por ejemplo, los papúes de Nueva Guinea, para indicar el cardinal "siete" hacen el gesto de tocar con su mano izquierda, sucesivamente, los dedos de la mano derecha, la muñeca y el codo. Si se hace delante de ellos el gesto único de tocar el codo no le encuentran sentido. Vestigios de esta incapacidad cultural se encuentran en los niños pequeños que preguntados sobre cuántos hay cuentan y dicen, por ejemplo,: “uno, dos, tres, cuatro”, y ante la pregunta insistente del adulto: “si pero, ¿cuántos hay?” vuelven a decir: “uno, dos, tres y cuatro”.

Más adelante el conjunto de referencia se desliga de los objetos físicos. Cada palabra se convierte en una palabra numérica (palabra que sirve para contar). En otras sociedades primitivas algunas de esas palabras siguen evocando partes del cuerpo humano.

En particular, nuestro conjunto numérico habitual es un conjunto ordenado de palabras: uno, dos, tres, cuatro, etc. Si alguien dice que tiene cinco objetos, su interlocutor entiende la información porque se imagina un objeto para el uno, otro para el dos, otro para el tres, otro para el cuatro y otro para el cinco. Es decir, la transmisión de dicha información numérica está dependiendo del hecho de tener almacenada en nuestra memoria esa sucesión de palabras, de forma que cuando nos dicen una de ellas somos capaces de recordar todas las anteriores.

1.9. Técnicas abreviadas de contar

Las técnicas de contar exigen mucho tiempo cuando los elementos a contar son muchos. No es extraño, por tanto, que se intente hacerlas más breves. Algunas situaciones permiten acortar el proceso de contar, partiendo de una colección de objetos de cardinal conocido al que se añaden o suprimen elementos para obtener el cardinal de la colección modificada. Las formas más importantes de abreviar los recuentos son las siguientes:

- Contar de dos en dos, de tres en tres, etc., aprovechando nuestra capacidad de reconocer directamente los cardinales de conjuntos pequeños.
- Contar hacia delante o hacia atrás, desde un cardinal dado. Por ejemplo, si tenemos un conjunto de dieciocho objetos y nos dicen que añadamos algunos más, no volvemos a contar todo para saber el cardinal del nuevo conjunto, sino que contamos los nuevos

objetos adjudicándoles las palabras 'diecinueve', 'veinte', 'veintiuno', etc. De la misma manera, si queremos suprimir unos cuantos objetos de un conjunto de dieciocho vamos adjudicando a los objetos surprimidos las palabras 'diecisiete', 'dieciséis', etc. y la última palabra numérica indicará el cardinal del conjunto final.

- Contar hacia delante o hacia atrás desde un cardinal dado hasta otro cardinal también dado. Esta técnica se usa cuando queremos saber cuántos objetos hay que añadir o quitar a un conjunto de cardinal dado para obtener otro cardinal conocido, o bien, qué diferencia existe entre dos conjuntos de cardinal dado. Por ejemplo, si nos preguntan cuántos objetos hemos añadido a un conjunto que tenía dieciséis y ahora tiene veinticuatro objetos, podemos decir: diecisiete, dieciocho, diecinueve, veinte, veintiuno, veintidós, veintitrés, veinticuatro, al mismo tiempo que vamos levantando dedos. Al final tendremos ocho dedos levantados que nos dan la respuesta a la pregunta inicial. Del mismo modo, si nos preguntan cuántos objetos hay que quitar para pasar de tener catorce a tener once, podemos decir: trece, doce, once, al mismo tiempo que levantamos dedos. Los tres dedos levantados nos dan la respuesta a la pregunta.
- Contar hacia delante o hacia atrás, desde el cardinal dado, tantas veces como indique el número de objetos a añadir o suprimir, respectivamente. Por ejemplo, si a un conjunto de veinticuatro elementos le quitamos cinco elementos podemos decir: veintitrés, veintidós, veintiuno, veinte, diecinueve, a medida que vamos quitando efectivamente esos objetos o levantando dedos. El hecho de quitar los cinco objetos o tener cinco dedos levantados nos indica que la cuenta ha terminado y el resultado es diecinueve.

Como hemos podido ver, algunas de estas técnicas abreviadas necesitan, además de la colección habitual de palabras numéricas, una colección suplementaria de objetos numéricos. Esta colección referencial de apoyo suelen ser los dedos, pero podría ser cualquier otra: palotes, fichas, etc.

2. LOS NÚMEROS NATURALES. DIFERENTES USOS Y FORMALIZACIONES

2.1. La noción de número natural y sus usos

Como resumen de las secciones anteriores podemos decir que *contar* es poner en correspondencia uno a uno los distintos elementos de un conjunto (contado) con un subconjunto de otro conjunto (contador, sistema numérico de referencia o sistema numeral). Los elementos del conjunto numérico pueden ser objetos físicos (piedrecillas, semillas, marcas en una varilla o en un segmento, partes del cuerpo), palabras, símbolos, etc. Pueden también ser imaginados por una persona, es decir, ser *representaciones internas* de objetos para realizar comparaciones o cálculos. Pero tanto si son perceptibles, como mentales, el uso básico que hacemos de ellos es contar y ordenar.

En una primera aproximación, podemos decir que los *números naturales* son cualquier sistema de "objetos" (símbolos, marcas, materiales concretos, palabras,...), perceptibles o pensados, que se usan para informar del cardinal de los conjuntos y para ordenar sus elementos, indicando el lugar que ocupa cada elemento dentro del conjunto. El sistema más común es el de las palabras: cero, uno, dos, tres,..; y los símbolos, 0, 1, 2, 3,... Para poder ser usados en las situaciones de recuento y ordenación estos sistemas de objetos numéricos deben tener una estructura recursiva específica, que se concreta en los llamados axiomas de Peano enunciados en la sección 2.2.

El número natural responde a la cuestión, ¿cuántos elementos tiene este conjunto? (recuento del número de elementos) y en estas circunstancias se habla de *número cardinal.*

Para hallar el cardinal de un conjunto se le pone en correspondencia biyectiva con una parte del conjunto de los números naturales, pero fijándose sólo en el número atribuido al último elemento que se cuenta. Los números naturales también se pueden usar para ordenar un conjunto y entonces se habla de *número ordinal.*

La noción de número natural surge de la fusión de los conceptos de número cardinal y ordinal [3], identificación que se realiza mediante el postulado fundamental de la aritmética: "El número cardinal de un conjunto coincide con el número ordinal del último elemento, y es siempre el mismo cualquiera que sea el orden en que se haya efectuado el recuento"

El número cardinal resulta de considerar, no un elemento, sino todo el conjunto, prescindiendo de la naturaleza de los elementos que lo componen y del orden en que se consideran. El número ordinal resulta de prescindir de la naturaleza de los objetos y teniendo en cuenta solamente el orden. La reflexión sobre el cardinal y ordinal y sobre las operaciones que se realizan sobre ellos permite identificar una misma estructura operatoria, lo que lleva a hablar del "número natural".

Algunos autores consideran la *medida* como un contexto de uso diferente de uso de los números naturales, hablando incluso del "número de medir". Pensamos que este uso es equivalente al de cardinal. Al medir una cantidad de magnitud tomando otra como unidad se trata de determinar *cuántas* unidades (o bien múltiplos y submúltiplos) hay en la cantidad dada. De manera equivalente, hablar del cardinal de un conjunto se puede ver también como "medir" el tamaño o numerosidad del conjunto considerado tomando el objeto unitario como unidad de medida. Cuando se trate de medir magnitudes continuas será necesario ampliar la noción de número para incluir a los racionales y reales.

Finalmente, mencionamos un uso habitual que no es propiamente numérico. Se trata del uso de un sistema numérico como etiquetas identificativas de objetos. Por ejemplo, los números de carnet de identidad de una persona, los números de teléfonos, la identificación de las teclas en calculadoras, etc. En realidad tales "números" se usan como códigos, careciendo del sentido cardinal, ordinal y algorítmico.

2.2. Formalizaciones matemáticas de los números naturales

La reflexión de los matemáticos sobre las propiedades y técnicas anteriores lleva a definir el conjunto de números naturales N de diversas formas que resumimos a continuación.

Formalización de Peano (Axiomas de Peano)

Esta formalización se basa en ideas muy sencillas: Consideramos como conjunto de los números naturales todo conjunto tal que cada elemento tiene un único siguiente, hay un primer elemento, y contiene todos los elementos siguientes de los anteriores. Los conjuntos que tienen estas propiedades se llaman *conjuntos naturalmente ordenados* o *conjunto de números naturales.*

[3] De esta manera la expresión "número natural" adquiere un nuevo significado matemático, al indicar la equivalencia estructural-operatoria de los sistemas de referencia numéricos. Es el aspecto algoritmico o formal: "el número se concibe operacionalmente gracias a las reglas según las cuales el usuario juega con él. Se formaliza en el enfoque axiomático. Los números aparecen como elementos de anillos y cuerpos que se fijan axiomáticamente"[3]. Este uso no es ajeno a las prácticas escolares ya que un objetivo importante del estudio de las matemáticas, incluso en los primeros niveles educativos, es la adquisición de destrezas básicas de cálculo y la comprensión de los algoritmos correspondientes.

Un conjunto de objetos (N) se dice que está naturalmente ordenado (y por tanto, se puede usar para contar y ordenar otros conjuntos de objetos de cualquier naturaleza) si cumple las siguientes condiciones:

1. A cada objeto le corresponde otro que se llama su siguiente o sucesor.
2. Existe un primer elemento, 0, que no es sucesor de ningún otro elemento.
3. Dos elementos diferentes de N no pueden tener el mismo sucesor (la función sucesor es inyectiva).
4. Todo subconjunto de N que contiene el 0 y que contiene el sucesor de cada uno de sus elementos coincide con N (principio de inducción).

En lugar de usar subconjuntos, el principio de inducción puede formularse con propiedades diciendo que toda propiedad de los números válida para 0 y que, siendo válida para n, lo es también para $n+1$, es verdadera para todos los números naturales.

Formalización a partir de la idea de clases de equivalencia (cardinal)

En este caso nos basamos en la idea de que dos conjuntos de objetos que tienen el mismo cardinal son "equivalentes" y todos los conjuntos equivalentes forman una misma clase de conjuntos: conjuntos vacíos, conjuntos con 1, 2, 3, elementos.... Puesto que el conjunto de estas clases está naturalmente ordenado, proporciona una posible definición de N.

Proposición: Sea F el conjunto de todos los conjuntos finitos. $F = \{A, B, C, ...\}$. El conjunto (N) formado por todas las clases de equivalencia producido en F por la relación de coordinabilidad, o sea, el conjunto de todas las clases de equivalencia, es un conjunto naturalmente ordenado.

$$N = \{[A], [B], [C], ...\}$$

La relación de orden se define de la siguiente manera,

Definición: Dadas dos clases, [A], [B] diremos $[A] \leq [B]$ si existe una correspondencia entre dos representantes A y B de dichas clases que sea inyectiva. Esto ocurre cuando el cardinal de la primera clase es menor que el de la segunda.

Proposición 3: La relación binaria $\leq$ definida entre las clases es una relación de orden total en N por cumplir las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. Esta relación binaria es una relación de orden total:

- Reflexiva, $Card(A) \leq Card(A)$, pues la aplicación identidad es inyectiva.
- Antisimétrica
- Transitiva
- Conexa: Dados dos naturales a, b, ocurre que $a \leq b$ ó $b \leq a$. Basta colocar como conjunto inicial el que tiene menos elementos.
- Es una buena ordenación: Cualquier subconjunto tiene primer elemento; cada elemento tiene su siguiente y no hay ningún número intermedio entre ambos.

Convenio de representación de las clases de equivalencia:
La clase vacía $\emptyset$ se representa por la notación 0, la clase unitaria por 1, la clase binaria por 2, etc. En la práctica el conjunto de clases de equivalencia N = {[A], [B], [C], ...}se sustituye por el sistema de símbolos {0, 1, 2, 3.,.. }. Cada símbolo representa a una clase de equivalencia y es también llamado el cardinal o número de elementos de cada conjunto de la clase.

Conjuntos ordenados y número ordinal

Ordenar un conjunto A es ponerlo en biyección con una parte del conjunto ordenado de N, pero atribuyendo a cada elemento de A un número fijo de N, que se llama su número ordinal, o *número de orden*.

Así al elemento al que atribuimos el número 1 le llamamos primero (1º), al que atribuimos 2, le llamamos segundo (2º), etc. al que atribuimos el número mayor de todo el subconjunto N le llamamos último; al anterior, penúltimo; al anterior a éste, antepenúltimo. Por tanto, el número que forma pareja con un elemento determinado del conjunto A es el número ordinal de dicho elemento. Aquí, a diferencia de lo que ocurría en la operación de contar, es esencial la forma de efectuar los apareamientos, es decir, el orden en que se van tomando los elementos del conjunto A. A cada apareamiento le corresponde una ordenación del conjunto.

Definición algebraica de la ordenación de números naturales

Una posibilidad es definir la relación de orden en los números naturales a partir de las operaciones:

Dados dos números naturales a y b, a es menor que b, $a \leq b$, si existe otro número natural d tal que $a + d = b$. Esta relación binaria definida en N cumple las propiedades:

- Es una relación de orden total, es decir que si se toman dos números cualesquiera siempre se puede decir cuál de ellos es mayor.
- Reflexiva, es decir, para todo natural, n, $n \leq n$;
- Antisimétrica, es decir, para dos naturales n y p, si se tiene que $n \leq p$ y que $p \leq n$, entonces necesariamente $n = p$.
- Transitiva: es decir, para tres naturales n, p y q, si se tiene que $n \leq p$ y que $p \leq q$, entonces necesariamente $n \leq q$.

Esta relación de orden es compatible con las operaciones de sumar y multiplicar en N. Esto quiere decir que,

- Si se suma un mismo número a los dos miembros de una desigualdd, no cambia el sentido de la desigualdad.
- Si se multiplican los dos miembros de una desigualdad por un mismo número natural, no cambia el sentido de la desigualdad.

3. TIPOS DE SISTEMAS DE NUMERACIÓN Y ASPECTOS HISTÓRICOS[4]

3.1. Situaciones introductorias

Situación A

Un extraterrestre llega a la Tierra. Viene de una galaxia lejana y su misión es contactar con los terrícolas e intercambiar información. Una vez superadas las dificultades de idioma el extraterrestre se interesa, entre otras muchas cosas, por el sistema de numeración escrito que se usa en la Tierra. Los hombres de la Nasa (naturalmente el extraterrestre va a parar a los Estados Unidos) se lo explican y él comenta: "Ah! Es el mismo sistema que utilizamos nosotros, pero nosotros usamos solamente cuatro símbolos, el del cero (☐), el del uno (|), el del dos (⊥) y el del tres (T)". ¿Cómo escribe el extraterrestre el número 9?

Situación B

El Parlamento Europeo, después de varios asesoramientos científicos, decide cambiar el número de símbolos de nuestro sistema de numeración escrito. Las opciones que se barajan

[4] La mayor parte de la información contenida en esta sección sobre aspectos históricos de los sistemas de numeración y las ilustraciones proceden de Ifrah (1985) libro cuya lectura se recomienda.

como mejores son la de utilizar sólo seis símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5) o la de utilizar doce símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α, β). Mientras el Parlamento discute nosotros vamos a escribir los primeros 25 números en esos nuevos sistemas.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
...									

Situación C

En el primer cuadro de la hoja adjunta tienes que agrupar las estrellas de 4 en 4. Después agruparás los grupos de 4 nuevamente de 4 en 4. Se sigue el proceso mientras sea posible continuarlo y, una vez finalizado, se escribe en las casillas situadas encima del cuadro (empezando por la derecha) el número de estrellas que ha quedado sin agrupar de 4 en 4, en la casilla siguiente, el número de grupos de 4 que no se han podido agrupar de 4 en 4, hasta llegar a escribir el número de las últimas agrupaciones realizadas.

En los demás cuadros se realiza el mismo proceso pero agrupando de 6 en 6, de 10 en 10 y de 12 en 12, respectivamente.

Hoja de datos para la situación C

x x x x x x x x x x x x x x
x x x x x x x x x x x x
x x x x x x x x
x x x x x x x x x x x x

x x x x x x x x x x x x x
x x x x x x x x x x x x
x x x x x x x x
x x x x x x x x x x x x x
x x x x x x x x x x

x x x x x x x x x x x x x x
x x x x x x x x x x x x
x x x x x x x x
x x x x x x x x x x x x

x x x x x x x x x x x x x
x x x x x x x x x x x x
x x x x x x x x
x x x x x x x x x x x x x
x x x x x x x x x x

x x x x x x x x x x x x x
x
x x x x x x x x x x
x
x x x x x x x
x
x x x x x x x x x
x x

x x x x x x x x x x

x x x x x x x x x x x x x
x
x x x x x x x x x x
x
x x x x x x
x x
x x x x x x x x
x x x

x x x x x x x x x x

3.2. Necesidad de aumentar el tamaño de las colecciones de objetos numéricos

La aparición en el Neolítico de sociedades estatales y del entramado administrativo que una sociedad de este tipo conlleva plantea la necesidad de:

- obtener el cardinal de colecciones formadas por muchos objetos (colecciones muy numerosas).
- recordar los cardinales correspondientes a muchas colecciones.

La contabilidad de un Estado exige la representación de números grandes y el almacenamiento de esos números de forma que sean fácilmente localizables. Pero eso supone:

- la invención de muchas palabras numéricas o la utilización de muchos objetos numéricos para representar grandes números.
- la búsqueda de sistemas de representación de los números que permitan al receptor del mensaje entenderlo con rapidez.
- la búsqueda de sistemas de representación de los números que permitan guardarlos en memoria de forma duradera, accesible y ocupando poco espacio.

Para resolver estas exigencias, las diferentes sociedades han creado sistemas de numeración compuestos por un pequeño número de signos que combinados adecuadamente según ciertas reglas sirven para efectuar todo tipo de recuentos y representar todos los números necesarios a esas sociedades. Para ello se han basado en dos principios:

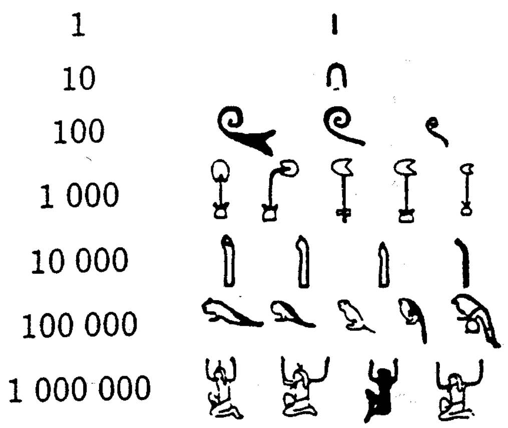
- los signos no representan sólo unidades sino también grupos de unidades. A cada uno de esos grupos de unidades se le llama unidad de orden superior. Al número de unidades que constituye cada unidad de orden superior se le llama base del sistema de numeración.
- cualquier número se representa mediante combinaciones de los signos definidos en el sistema de numeración.

3.3. Algunos ejemplos de sistemas de numeración escritos

Vamos a referirnos ahora a diversos sistemas de numeración escritos, todos ellos de base 10, pero que han sido construidos a partir de principios diferentes.

a) Sistema jeroglífico egipcio

Se basa en la definición de símbolos para la unidad, diez y las potencias de diez.

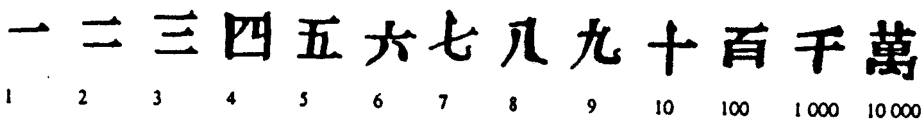


A partir de ahí los números se representan repitiendo esos símbolos todas las veces que haga falta. Por ejemplo, el número 243688 se representaría de la siguiente manera:

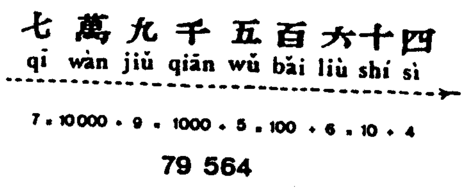
200 000 3000 800
40 000 600 8
243 688

b) Sistema chino

En el sistema chino no sólo se tienen símbolos para la unidad, diez y las potencias de diez sino para todos los números intermedios entre uno y diez



De esta manera se evitan repeticiones fastidiosas pues los números que preceden a las potencias de la base indican cuántas veces deben repetirse éstas. Por ejemplo, el número 79564 se escribiría:



aunque hay que tener en cuenta que los chinos escriben de arriba hacia abajo.

Este sistema incorpora un principio de tipo multiplicativo, es decir, el número representado ya no es la suma de los valores de los signos que lo componen, sino una mezcla de sumas y productos.

Ejercicios

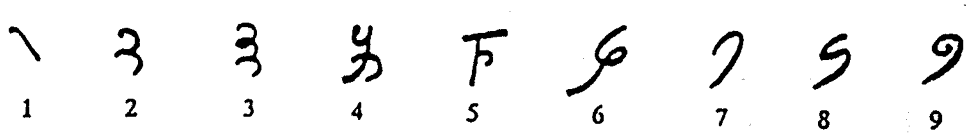
2. Escribe en el sistema egipcio, romano y chino el número 1386.

3 ¿Cuál es el menor número que se escribe con 25 símbolos en sistema egipcio?

4. Imagina que en un nuevo lenguaje, los primeros números son: Sis, boom, bah, tra, la, y después de contar un buen rato, la serie de números continúa: Hip, hoo, rah, fo, fum. Completa las operaciones siguientes:
  a. Hoo +bah=
  b. Fo-boom=
  c. Fum-hip=

c) Sistema hindú

En el norte de la India y desde el siglo III a. C., existió un sistema de numeración escrito cuyos primeros símbolos eran los siguientes:

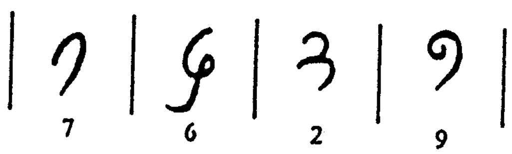


Pero además este sistema también tenía símbolos específicos para los números

10	20	30	40	50	60	70	80	90
100	200	300	400	500	600	700	800	900
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
10000	20000	30000	40000	50000	60000	70000	80000	90000

y para escribir, por ejemplo, el número 5436 se escribía el símbolo que representaba al número “5000” seguido del que representaba al “400”, el del “30” y, por último, el del “6”. Se trataba por tanto de un sistema de tipo aditivo.

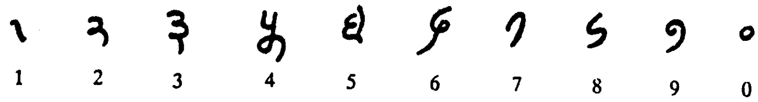
Por otro lado, para realizar las operaciones construían una tabla de calcular dibujando rayas verticales sobre la arena de manera que las fichas, según en qué casilla se situasen, significaban unidades, decenas, centenas, etc. Si colocaban tres fichas en la casilla más a la derecha significaba tres unidades. Si las colocaban en la casilla siguiente significaban tres decenas. Pero en algún momento se les ocurrió dibujar las nueve primeras cifras en las casillas en lugar de utilizar fichas. Así, por ejemplo, el número 7629 lo representaban de la siguiente manera:



Como consecuencia los símbolos que representaban los números del 1 al 9, se utilizaron regularmente en los cálculos mientras que los que representaban decenas, centenas, etc. no se utilizaban porque eso venía indicado por la casilla en que se encontraba la cifra (A los signos del 1 al 9 se les suele llamar cifras o dígitos). Aparece así una notación posicional en la que el significado de la cifra se complementa con la posición que ocupa. La cifra situada en la casilla de la derecha del número anterior significa 9 mientras que situada en la siguiente casilla significaría 90 y en la siguiente 900. Naturalmente, cuando faltaba una unidad de un orden determinado se dejaba la casilla correspondiente vacía.

Podría pensarse que el paso de este tipo de notación a una en que se eliminasen las barras verticales es inmediato. Sin embargo, este paso no se dio hasta varios siglos después pues exige definir un signo para el cero y esto es algo que muy pocas culturas han hecho. La razón es difícilmente inteligible para nosotros, acostumbrados desde niños a la existencia del signo 0, pero tenemos que comprender lo artificioso que resulta crear un símbolo para indicar el vacío, la nada, la no existencia de algo. Si algo no existe no hace falta apuntarlo. El vacío se indica mostrándolo, no rellenándolo con un signo. La idea de inventar un signo para indicar la no existencia de unidades o la existencia de un lugar vacío es una idea sorprendente y se les ocurrió, por fin, a los matemáticos hindúes a principios del siglo VI d. C., lo que les permitió prescindir de las barras verticales a la hora de representar los números. A partir de entonces un número, por ejemplo el 9100 se representó así:

Cuando los árabes conquistaron el norte de la India conocieron este sistema de numeración y al darse cuenta de lo mucho que facilitaba los cálculos lo adoptaron. Las cifras que vienen a continuación corresponden a la grafía habitual en el Califato de Bagdad.



Nuestro sistema de numeración escrito es, por tanto, una invención hindú que, posteriormente, fue asumida por los árabes, los cuales la difundieron por todo su imperio. Los contactos comerciales y culturales de Europa con el mundo árabe propiciaron la difusión de este sistema en la Europa occidental donde entró en competencia con el sistema de numeración romano. Lentamente fue ganando adeptos hasta que a finales del siglo XVIII quedo definitivamente implantado.

3.4. Tipos de sistemas de numeración

Los ejemplos anteriores nos muestran la existencia de diferentes tipos de sistema de numeración que ahora vamos a definir con más precisión.

a) Sistema aditivo regular

En este sistema se definen símbolos para la unidad, la base y las potencias de la base. El número representado se obtiene sumando los valores de los signos que componen su representación. El sistema egipcio es un ejemplo de sistema aditivo regular de base 10.

b) Sistema multiplicativo regular

En él se definen símbolos para la unidad, la base, las potencias de la base y todos los números comprendidos entre la unidad y la base. El número representado se obtiene multiplicando cada potencia de la base por el valor del símbolo que le precede y sumando los resultados junto con las unidades. Un ejemplo de este tipo de sistemas es el sistema chino de numeración que es un sistema multiplicativo regular de base 10.

c) Sistema posicional regular

En este sistema se definen símbolos para la unidad y los números comprendidos entre la unidad y la base. También se define un símbolo, el cero, para indicar la no existencia de unidades. En cambio, no se definen símbolos específicos para la base ni para las potencias de la base, representándose éstas por medio de combinaciones de los símbolos de la unidad y del cero. En estas condiciones, cada uno de los signos que componen la representación del número, dependiendo del lugar que ocupa, hace referencia a las unidades o a una determinada potencia de la base. El número representado se obtiene de la misma manera que en un sistema multiplicativo. Nuestro sistema de numeración escrito es un ejemplo de sistema posicional decimal.

Reglas de los sistemas de numeración posicionales

Las reglas de los sistema de numeración posicionales ordenados se pueden sintetizar de la siguiente manera:

1. Elegido un número b >1 como base del sistema de numeración, se utilizan b símbolos, llamados cifras o guarismos (0, 1, 2, …, b-1) que representan el cero y los primeros números naturales.
2. Cada b unidades simples (o de 1er orden) forman una unidad de 2º orden, y se escribe a la izquierda de las unidades de 1er orden. (Principio del valor relativo de las cifras)
3. Se continúa el proceso como en 2)
4. Cuando no hay unidades de un orden (carencia de unidades) se expresa mediante un 0 en la posición correspondiente.
5. La base b se representa por $10_{(b}$ (es la unidad de 2º orden); la unidad de tercer orden, b^2 se expresará como $100_{(b}$.

Teorema fundamental: Existencia y unicidad de la expresión de un número n en base cualquiera b

Dado un número natural b (que se llama base del sistema de numeración), todo número natural n $\in$ N se puede expresar de manera única mediante el siguiente polinomio:

$$n= c_k b^k + r_k b^{k-1} + r_{k-1} b^{k-2} + ... + r_3 b^2 + r_2 b + r_1$$

donde r_1, r_2, ..., r_k, c_k, son números naturales menores que b.

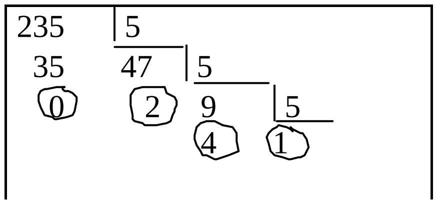
3.5. Cambios de base en los sistemas de numeración

Para comprender las reglas de los sistemas de numeración posicionales ordenados, entre los que se encuentra el sistema decimal de numeración habitualmente usado, es conveniente realizar y analizar las tareas de paso del sistema de numeración base 10 a otras bases distintas, tanto menores que 10, como mayores, y viceversa.

Paso de la escritura en base 10 de un número n a la base b

En primer lugar habrá que determinar la cifra de las unidades (o de primer orden), para lo cual habrá que dividir *n* entre *b*; el resto será la cifra de la unidades de la nueva expresión. Para hallar la cifra a colocar en la posición de segundo orden se divide el primer cociente obtenido por *b* y se toma el resto; y así sucesivamente.

Ejemplo: El número $235_{(10}$, expresado en base 5 será $1420_{(5}$



Paso de la escritura de un número n en base b a base 10

Basta expresar la escritura de *n* en forma polinómica (en forma de potencias de la base *b*) y realizar las operaciones indicadas en base 10; el resultado será la escritura en de *n* en base 10.

Ejemplo: El número $2034_{(5}$ será el $269_{(10}$ ya que,
$2034_{(5} = 2.5^3 + 0.5^2 + 3.5 + 4 = 269$ (haciendo las operaciones en base 10)

El paso de la escritura de un número de base b_1 a base b_2 se puede realizar pasando el número dado en base b_1 a base 10 y después dicho número en base 10 a base b_2 por el método explicado anteriormente.

Ejercicios

5. Efectúa los cambios de base siguientes: 3415 (de base 10 a base 3); 999 (de base 10 a base 7); 25842 (de base 10 a base 12); 1001110 (de base 2 a base 10); ABC6 (de base 13 a base 10); 33421 (de base 5 a base 3); 34250 (de base 6 a base 4) y 102102 (debase 3 a base 7).

6. Escribe las cifras del número siguiente en base 3:
$1 + 3 + 3^2 + 3^4 + 3^6$
Expresa el número anterior en base 9

7. Escribe en base 5 las cifras del siguiente número
5 x (5 x (5 x (5 + 4) + 3) + 2) + 1 ; x significa el signo de multiplicar.

8. En base 16 (hexadecimal) los dígitos usados son 0 hasta 9 y las letras A, B, C, D, E, F para los números del diez hasta el quince.
a) Convierte $B6_{(16}$ a base 10;
b) Convierte $B6_{(16}$ a base 2;
c) Explica cómo se puede pasar $B6_{(16}$ a base 2 directamente, esto es, sin pasarlo primero a base 10.

3.6. Características de nuestros actuales sistemas de numeración escrito y oral

a) Sistema de numeración escrito

Como ya hemos dicho antes es un sistema posicional regular de base 10. Los símbolos que se definen son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

b) Sistema de numeración oral

Es un sistema multiplicativo y de base 10 pero con irregularidades. Es un sistema multiplicativo porque define símbolos no sólo para los números anteriores a la base sino también para la base y sus potencias. El número 3400 no lo leemos como "tres cuatro œro cero" sino como "tres mil cuatrocientos", es decir, hacemos referencia a las potencias de la base "mil" y "cien" o "ciento".

Las irregularidades dependen del idioma y en castellano son las siguientes:

- Once, doce, trece, catorce y quince. En un sistema regular se diría: dieciuno, diecidos, diecitrés, diecicuatro y diecicinco.
- Veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa. En un sistema regular se diría: dos dieces (o dos decenas), tres dieses, cuatro dieses, etc.
- Quinientos en lugar de cinco cientos
- Algunas de las potencias de diez no tienen un símbolo específico, sino un símbolo compuesto por los correspondientes a otras potencias. Así, por ejemplo, la potencia 10^4 no tiene un símbolo propio como le correspondería en un sistema regular, sino un símbolo compuesto: diez mil. Lo mismo sucede con otras potencias de la base (10^5 se dice cien mil, 10^7 se dice diez millones, 10^8 se dice cien millones, etc.), lo que hace que las potencias mil (10^3) y millón (10^6) se conviertan en bases auxiliares.
- La palabra 'billón' tiene un significado ambiguo. En España y otros países de origen latino quiere decir 'un millón de millones' (10^{12}), mientras que en los países de tradición anglosajona la palabra equivalente significa 'mil millones' (10^9).

c) Sistema de numeración oral ordinal

Se usa para nombrar a los ordinales, aun cuando también puede usarse para ello el sistema oral habitual. Es un sistema de numeración de base 10 en el que se definen símbolos para la unidad y los demás números anteriores a la base, para la base y sus potencias, y también para los nueve primeros múltiplos de la base y del cuadrado de la base. Un número viene dado por la suma de los valores de los signos que lo representan; es por tanto un sistema de tipo aditivo, pero con una sobreabundancia de términos. En muchas de las palabras que nombran a los diferentes múltiplos de la base o de la base al cuadrado se hace patente un criterio de tipo multiplicativo. Por ejemplo, el término 'octingentésimo' se relaciona con los términos 'ocho' y 'centésimo'.

Los símbolos de este sistema de numeración son los siguientes: primero, segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto, séptimo, octavo, noveno, décimo, undécimo (o décimo primero), duodécimo (o décimo segundo), vigésimo (20), trigésimo (30), cuadragésimo (40), quincuagésimo (50), sexagésimo (60), septuagésimo (70), octogésimo (80), nonagésimo (90), centésimo (100), ducentésimo (200), tricentésimo (300), cuadringentésimo (400), quingentésimo (500), sexcentésimo (600), septingentésimo (700), octingentésimo (800), noningentésimo (900), milésimo (1000), millonésimo (1.000.000). Según esto el ordinal 783 se diría septingentésimo octogésimo tercero. Hoy en día, bastantes de estos términos han caído en desuso.

Ejercicios

9.Utiliza nuestro sistema de numeración oral para expresar el número:
754.120.004.002000.000.000

10. Utiliza nuestro sistema posicional de numeración escrita para representar el número siete trillones, setenta mil siete billones, siete millones, setenta y siete. 2.

11. Expresa mediante nuestro sistema oral ordinal los números 11, 14, 27, 53, 99, 135, 366, 584 y 1336.

12. ¿Cuántos números capicúas hay comprendidos entre 1 y 1000?

A continuación vamos a describir otros sistemas de numeración, lo que nos permitirá ver cómo diferentes culturas han resuelto el problema de representar los números.

3.7. Sistemas de numeración orales: ejemplos

En la lengua *Api de las Nuevas Hebridas* representan los 24 primeros números partiendo de 5 palabras: tai, lua, tolu, vari, luna (que significa literalmente "la mano") que equivalen a nuestras palabras: uno, dos, tres, cuatro y cinco. A partir de ahí los números siguientes los nombran combinando esas palabras: para 6 se dice: otai (literalmente 'el nuevo uno')

- para 7 se dice: olua (literalmente 'el nuevo dos')
- para 8 se dice: otolu (literalmente 'el nuevo tres')
- para 9 se dice: ovari (literalmente 'el nuevo cuatro')
- para 10 se dice: lualuna (literalmente 'las dos manos')
- para 11 se dice: lualuna i tai (literalmente 'dos manos y uno') para 15 se dice: toluluna (literalmente 'tres manos')
- para 16 se dice: toluluna i tai (literalmente 'tres manos y uno') para 20 se dice: variluna (literalmente 'cuatro manos')
- para 24 se dice: variluna i vari (literalmente 'cuatro manos y cuatro')

Se trata de un sistema de base cinco, pues los números se expresan indicando los grupos de cinco que los componen y el resto que queda.

En *euskera* las palabras que se utilizan para nombrar los diez primeros números son las siguientes: bat (uno), bi (dos), hiru (tres), lau (cuatro), bost (cinco), sei (seis), zazpi (siete), zortzi (ocho), bederatzi (nueve), hamar (diez). A partir de ahí, construyen las palabras numéricas como sigue:

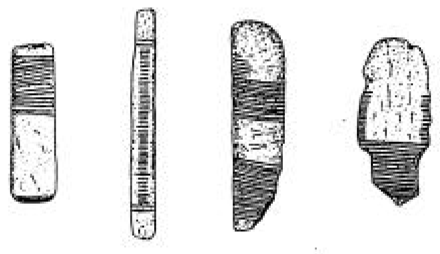
- once se dice: hamaika
- doce se dice: hamabi (literalmente 'diez y dos')
- trece se dice: hamahiru (literalmente 'diez y tres')
- catorce se dice: hamalau (literalmente 'diez y cuatro')
- quince se dice: hamabost (literalmente 'diez y cinco')
- dieciséis se dice: hamasei
- diecisiete se dice: hamazazpi
- dieciocho se dice: hemezortzi (no sigue la regla, pero actualmente se admite también 'hamazortzi ')
- diecinueve se dice: hemeretzi (no sigue la regla)
- veinte se dice: hogei
- treinta se dice: hogeitamar (literalmente 'veinte y diez')
- cuarenta se dice: berrogei (no sigue la regla)
- cincuenta se dice: berrogeitamar (literalmente 'cuarenta y diez')
- sesenta se dice: hirurogei (literalmente 'tres veintes')
- setenta se dice: hirurogeitamar (literalmente 'tres veintes y diez')

- ochenta se dice: larogei (literalmente 'cuatro veintes'')
- noventa se dice: larogeitamar (literalmente 'cuatro veintes y diez')
- cien se dice: ehun.

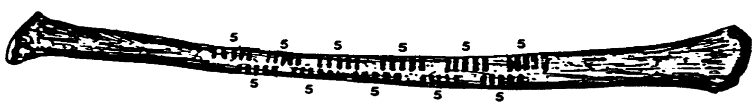
Se trata de un sistema de base 20 con una base auxiliar 10. En el sistema de numeración oral francés también se conservan vestigios de una base 20. Se dice, por ejemplo: 'quatre-vingts' (cuatro veintes) para indicar 'ochenta' y 'quatre-vingts-dix' (cuatro veintes diez) para indicar 'noventa' .

3.8. Sistemas de numeración basados en colecciones de objetos: ejemplos

a) Muescas: La utilización de muescas para llevar una cuenta está documentada desde la Prehistoria.



Entre los huesos prehistóricos con muescas existen algunos (como el reflejado en el dibujo siguiente) en los que las muescas han sido representadas en grupos de cinco. Es uno de los primeros ejemplos de agrupación para facilitar la lectura del número.

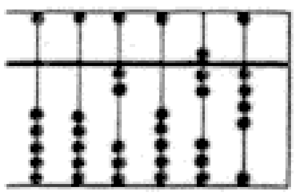


b) Objetos ensartados en hilos: collares

En algunas regiones de África occidental los pastores contaban sus rebaños haciendo desfilar a los animales uno detrás de otro. Cuando pasaba el primero ensartaban una concha en una tira blanca, otra cuando pasaba el segundo y así sucesivamente. Al llegar al décimo animal deshacían el collar y ensartaban una concha en una tira azul que asociaban a las decenas. Después ensartaban de nuevo conchas en la tira blanca hasta llegar al vigésimo animal y entonces ensartaban una segunda concha en la tira azul. Cuando había ya diez conchas en la tira azul deshacían el collar de las decenas y ensartaban una concha en una tira roja reservada para las centenas. Y así sucesivamente hasta que se acababa el recuento de los animales. Al llegar a los doscientos cincuenta y ocho animales, por ejemplo, habría dos conchas en la tira roja, cinco en la azul y ocho en la blanca. La base de este sistema es la decena.

c) Objetos ensartados en varillas: ábacos

El ejemplo que proponemos es el de un ábaco que se ha utilizado para contar y calcular incluso después de la segunda guerra mundial (ábaco japonés).



La varilla situada a la derecha indica centésimas, la segunda varilla décimas, la tercera unidades, la cuarta decenas, la quinta centenas, etc. En la varilla de las unidades cada una de las cuatro bolas de la parte de abajo indica una unidad, pero la bola situada en la parte de arriba indica cinco unidades. De esa manera el número siete se representará moviendo la bola superior y dos bolas inferiores hacia el eje central. En la varilla de las decenas la bola superior indica cincuenta y cada una de las bolas inferiores diez y así sucesivamente. Se trata pues de un sistema de base diez con una base auxiliar cinco.

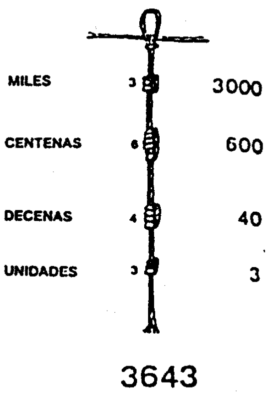
Ejercicios

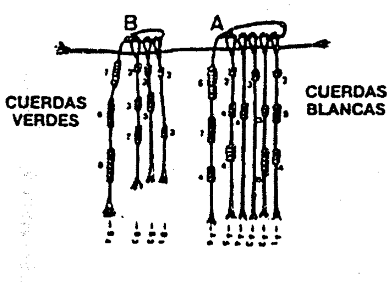
13. Expresa los números 457 y 17089 mediante:
- un ábaco japonés
- el sistema de numeración romano
- sistema de numeración egipcio
- sistema de numeración chino

14. Supongamos que cuentas usando manos y dedos. ¿Cómo representarías el número 12?

d) Nudos

Los incas representaban números y contaban haciendo nudos en una cuerda. Según la posición en que estaban situados los nudos indicaban unidades, decenas, centenas, millares, etc. A estas cuerdas se les llamaba quipus.





El dibujo de la derecha representa una contabilidad de ganado bovino (cuerdas blancas y ganado ovino (cuerdas verdes). Las cuerdas blancas de derecha a izquierda representan el número de toros, vacas lecheras y vacas estériles. Las cuerdas verdes indican número de borregos, corderos, cabras, etc. Las cuerdas que enlazan a las otras indican las sumas de las cantidades representadas en las cuerdas enlazadas.

e) Objetos sueltos: valor definido por la posición

Existen sistemas de numeración basados en guijarros o fichas en los que el valor numérico de los objetos viene dado por la posición que ocupan en un tablero distribuido en casillas. Así, según que el guijarro o ficha esté situado en una u otra casilla significará una unidad, una decena, una centena, etc. Estas tablas de fichas se utilizaron en Europa para efectuar cálculos hasta el siglo XVIII.

f) Objetos sueltos: valor definido por alguna característica del objeto

Los sumerios utilizaban pequeños objetos de arcilla para contar y representar los números. El valor numérico de cada objeto venía dado por su forma de la siguiente manera:
1 = cono pequeño; 10 = bola pequeña; 60 = cono grande; 600 = cono grande perforado; 3600 = bola grande; 36000 bola grande perforada.

Se trataba de un sistema de numeración de base 60 ($3600 = 60^2$) con una base auxiliar 10 ($600 = 10 \times 60$, $36000 = 10 \times 60^2$).

Para garantizar el pago de una deuda, por ejemplo, el conjunto de objetos que representaba el valor numérico de la deuda se encerraba en una esfera hueca sobre la que se imprimían los sellos del acreedor, el deudor y el notario. Este último guardaba la esfera y, posteriormente, en el momento de saldar la deuda, la abría y las partes implicadas se aseguraban de que el pago estaba conforme.

3.9. Sistemas de numeración basados en partes del cuerpo humano: el origen de algunas bases

Se cree que la mayor parte de los sistemas de numeración tienen su origen en otros más primitivos basados en la utilización de distintas partes del cuerpo humano como objetos numéricos. Las bases más utilizadas: 5, 10, 12, 20, 60 pueden explicarse como un intento de aumentar la capacidad contable de los dedos.

a) Base cinco

Si utilizamos los dedos de la mano derecha para contar unidades hasta cinco y por cada cinco unidades levantamos un dedo de la mano izquierda estaremos en un sistema de numeración de base cinco. Cada cinco unidades dan lugar a una unidad de orden superior, los dedos de la mano izquierda, y toda la mano izquierda representará una unidad de segundo orden compuesta de 25 unidades.

b) Base diez

Aparece al utilizar los dedos de las dos manos para contar unidades. Un hombre representaría una unidad de orden superior, la decena.

c) Base veinte

Aparece al utilizar los dedos de las dos manos y de los dos pies para contar unidades. Un hombre representaría la unidad de orden superior que en este caso sería una veintena.

d) Base doce

Se explica si se utiliza el dedo pulgar de la mano derecha para contar las falanges de los otros dedos de la misma mano. Tenemos así doce falanges en la mano derecha. Si además por cada doce unidades señalamos una falange de la mano izquierda tendremos una unidad de primer orden, la docena, y las dos manos representaran una unidad de segundo orden ($144 = 12^2$).

e) Base sesenta

Aparece como una combinación de cinco y doce si contamos falanges con la mano derecha y por cada docena levantamos un dedo de la mano izquierda. Las dos manos representan entonces una “sesentena”.

Ejercicios

15. El uso de la base 10 en el sistema de numeración indoarábigo se puede suponer que se debe a que tenemos 10 dedos entre ambas manos. Supongamos que entre los marcianos ocurrió lo mismo, esto es, usaron un sistema de numeración basado en el número de dedos de sus manos. ¿Cuántos dedos tenían los marcianos en sus manos si sabemos que en dicho planeta el número diecisiete se escribía 21?.

16. Construye un sistema aditivo de base 12 y utilízalo para expresar los números 1245674, 23478 y 100.

17. Construye un sistema aditivo de base 20 y utilízalo para representar los números del ejercicio anterior.

18. En la siguiente tabla escribimos los números del 0 al 35 en base 6. Describe todos los patrones numéricos que puedes encontrar:

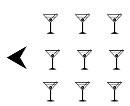
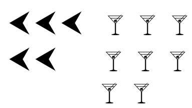
0	1	2	3	4	5
10	11	12	14	14	15
20	21	22	24	24	25
30	31	32	33	34	35
40	41	42	43	44	45
50	51	52	53	54	55

3.10. Otros ejemplos históricos de sistemas de numeración escritos

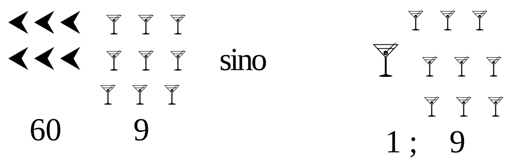
La necesidad de almacenar información numérica propia de las sociedades estatales propicia la aparición de los sistemas escritos de numeración. Estos números escritos se conservan bien, ocupan poco lugar y su almacenamiento se organiza con facilidad; tienen, por tanto, ventajas frente a las representaciones numéricas orales o mediante objetos. A continuación vamos a ver algún ejemplo más :

a) Los sumerios empezaron a desarrollar una contabilidad escrita a partir del 3200 a.C. consistente en dibujar en tablillas de arcilla las figuritas de barro que utilizaban para indicar los números. En la figura de una “factura” sumeria descubierta en Uruk (hacia el 2850 antes de J.C.) se observa el dibujo de las esferas y conos de barro que se utilizaban para representar los números. Aparecen también unos dibujos que representan sacos, dibujos de espigas que indican distintos tipos de cereal y unos dibujos de patos que representan aves en general.

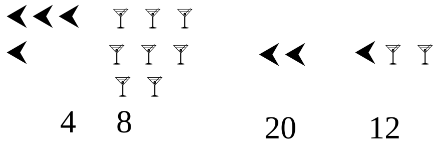
b) Los matemáticos y astrónomos de Babilonia fueron los primeros en construir un sistema de numeración escrito en el que se utilizaba en parte un criterio posicional. Para escribir los números utilizaban sólo dos signos: un 'clavo' vertical que indicaba la unidad y una 'espiga' que indicaba la decena. Los números de 1 a 59 se representaban de manera aditiva repitiendo esos signos las veces que hiciera falta. Así, por ejemplo, 19 y 58 se escribían:

 (1 espiga + 9 clavos)  (5 espigas + 8 clavos)

Pero a partir de 59 la escritura era posicional, es decir, el número 69, por ejemplo, no se escribía



Así pues, una escritura como:

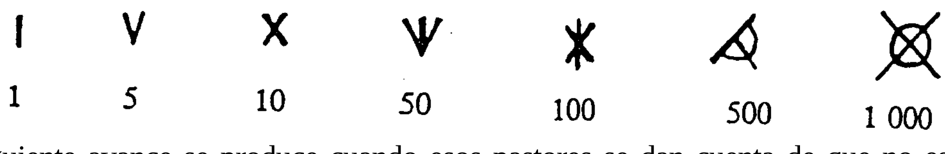


correspondía al número 48 x 60^2 + 20 x 60 + 12 = 174.012. Nos encontramos ante un sistema posicional de base 60 donde los signos que indican cuántas unidades o diferentes potencias de la base tiene el número constituyen un sistema aditivo de base 10. Este sistema tenía muchos inconvenientes porque la falta de un cero y la mezcla de sistema posicional con aditivo creaba muchas ambigüedades en la escritura de los números. Por ejemplo, ‘clavo’ nunca se sabía bien si indicaba una unidad, 60 unidades o cualquier otra potencia de la base; dos 'clavos' tanto podían representar dos unidades como el número 61, etc.

La astronomía Babilonia nos ha transmitido su manera de representar los números en algunos ámbitos muy relacionados con la astronomía, como la medida del tiempo en horas, minutos y segundos y la de la amplitud de ángulos en grados, minutos y segundos. Cuando decimos que un intervalo de tiempo es de 3h 23m 55s estamos utilizando un sistema de numeración posicional de base 60 (sexagesimal) ya que cada hora equivale a 60 minutos y cada minuto a 60 segundos. La diferencia con el sistema babilonio consiste en que no representamos las horas, minutos y segundos utilizando un sistema aditivo de base 10, sino utilizando nuestro sistema posicional de base 10.

c) En Italia, antes del Imperio Romano existían pueblos de pastores que habían desarrollado una cultura de muescas. Por cada cabeza de ganado que contaban grababan una muesca en un palo o hueso. Para facilitar la lectura de las muescas empezaron a agruparlas de cinco en cinco haciendo marcas separadoras que sintetizasen la información numérica contenida en las muesca.

Al llegar a la quinta muesca grababan un trazo oblícuo y en la décima dos trazos oblícuos cruzados. Volvían a grabar el trazo oblícuo en la muesca número 15 y el aspa en la número 20. Para facilitar la lectura de números más grandes inventaron signos específicos para 50, 100, 500 y 1000.



El siguiente avance se produce cuando esos pastores se dan cuenta de que no es necesario grabar todas las muescas puesto que algunas de ellas ya recogen toda la información anterior. Es decir, cuando descubren que para expresar el número IIIIV IIIIV IIIIX IIIV II es suficiente con escribir XXVII

Los romanos heredaron estas marcas y acabaron por identificarlas con algunas letras.

500

Así, el trazo oblicuo se identificó con la letra V, el aspa con la X, la marca para 50 se transformó en una L, la de 100 en una C, y la de 500 y 1000 en una D y una M, respectivamente. Además añadieron una última modificación al sistema consistente en introducir un principio sustractivo para acortar la escritura de ciertos números. De acuerdo con este principio escribían IV en vez de IIII, IX en vez de VIIII, XL en ve de XXXX, etc. Estamos pues ante un sistema de tipo aditivo, aunque con irregularidades, de base 10 y con una base auxiliar 5. Este sistema todavía lo usamos nosotros para indicar ordinales y fechas.

Actualmente para escribir en números romanos seguimos las siguientes reglas de escritura:

i) Los símbolos *I* (uno), *X* (diez) , *C* (cien) y *M* (mil) son los 'principales' y los símbolos *V* (cinco), *L* (cincuenta) y *D* (quinientos) los 'secundarios'.
ii) Los símbolos principales no se pueden repetir más de tres veces y los secundarios no pueden repetirse ninguna vez.
iii) Todo símbolo situado a la derecha de uno de igual o mayor valor se suma. Si un símbolo principal está situado a la izquierda de un símbolo de mayor valor se resta.
iv) A la izquierda de un símbolo solo se puede poner como símbolo de menor valor el símbolo principal inmediatamente anterior.
v) Los millares, diezmillares, cienmillares, etc. de los números mayores o iguales que 4.000 se escriben como si fueran unidades, decenas, centenas, etc., colocándoles una raya horizontal por encima. Por ejemplo, 583.459 se escribe, $\overline{DLXXXIII}\ CDLIX$.

4. TALLER DE MATEMÁTICAS

1. En los siguientes ejercicios, escribe todas las posibilidades utilizando un código de escritura adecuado y cuenta después cuántas son. Si salen muchos casos posibles encuentra algún procedimiento que permita hallar el número total sin tener que contar y describe cómo podrían escribirse todos los casos.

a) Distribuye, de todas las maneras posible, 15 monedas de peseta en cuatro montones.

b) Ana, Marisa, Luis y Pedro quedan en una cafetería. Llegan de uno en uno. Escribe las posibilidades de orden de llegada de esas cuatro personas.

c) Escribe todos los números de tres cifras que se pueden formar con los dígitos 3, 4, 7, y 9. ¿Cuántos son mayores de 700?

2. Averigua cuántos cuadrados se pueden trazar sobre la trama siguiente con la condición de que los vértices de cada cuadrado sean puntos de la trama:

```
*   *   *   *   *
*   *   *   *   *
*   *   *   *   *
*   *   *   *   *
```

* * * * *

3. Construye un sistema multiplicativo de base 8 y utilízalo para expresar los números 32768, 5400 y 89. Haz las transformaciones necesarias para convertirlo en un sistema posicional de base 8. Vuelve a escribir los números anteriores en el nuevo sistema.

4. Construye un sistema multiplicativo de base 5 y utilízalo para expresar los números del ejercicio anterior. Haz las transformaciones necesarias para convertirlo en un sistema posicional de base 5. Vuelve a escribir los números anteriores en el nuevo sistema.

5. En los siguientes ejercicios suponemos que todos los sistemas de numeración son posicionales. Lo único que puede variar es la base del sistema.

   a. ¿En qué base debe escribirse el número 17 para que se convierta en el 21?
   b. ¿En qué base debe escribirse el número 326 para que se convierta en el 2301?
   c. ¿En qué sistema de numeración se verifica que 55+43 = 131?
   d. ¿En qué sistema de numeración se verifica que 54 x 3 = 250?

6. Sabiendo que en un cierto sistema de numeración se tiene que 36 + 45 = 103, calcula el producto 36 x 45 en dicho sistema.

7. Halla la base del sistema de numeración en el que el número 554 representa el cuadrado de 24.

8. En los sistemas de numeración de bases x y x +1, un número se representa por 435 y 326 respectivamente. Halla x y la expresión de dicho número en el sistema decimal.

9. Halla la base del sistema de numeración en el que los números 479, 698 y 907 están en progresión aritmética.

10. Un número de tres cifras en el sistema de base 7 tiene sus cifras invertidas en el sistema de base 9. ¿Cuál es ese número? Exprésalo en base decimal.

C: Conocimientos Didácticos

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

El estudio de los sistemas numéricos, incluyendo su uso en las diversas situaciones de la vida diaria, ha sido históricamente una parte esencial de la educación matemática desde los primeros niveles. Esto es así porque todas las matemáticas que se estudian desde preescolar hasta el bachillerato están cimentadas en los sistemas numéricos (naturales, enteros, racionales y reales). Los principios que fundamentan la resolución de ecuaciones son los mismos que las propiedades estructurales de los sistemas numéricos. De igual modo las medidas de magnitudes no son otra cosa que números y los datos estadísticos son en la mayoría de los casos información numérica contextualizada. Esto explica que la comprensión de los números, de las operaciones aritméticas y la adquisición de destrezas de cálculo formen el núcleo de la enseñanza de las matemáticas en la educación infantil y primaria. Los estudiantes deberán enriquecer progresivamente su comprensión de los números; esto implica saber qué son los números, como se representan con objetos, símbolos numéricos o sobre la recta numérica, cómo se relacionan unos con otros, el tipo de estructura que forman, y cómo se usan los números y las operaciones para resolver problemas.

1.1. Diseño Curricular Base del MEC

El Decreto del MEC (BOE 26-6-91) por el que se establecen las enseñanzas mínimas del área de matemáticas en la educación primaria establece las siguientes indicaciones para el bloque temático de "Números y operaciones":

Conceptos:

1. Números naturales
2. Sistemas de numeración decimal

Procedimientos

1. Utilización de diferentes estrategias para contar de manera exacta y aproximada.

Actitudes

1. Curiosidad por indagar y explorar las regularidades y relaciones que aparecen en conjuntos de números.
2. Sensibilidad e interés por las informaciones y mensajes de naturaleza numérica apreciando la utilidad de los números en la vida cotidiana.

Estas orientaciones curriculares fueron formuladas de manera más explícita en el DCB (Documento Curricular Base, MEC, 1989). Entre los objetivos generales que hacen referencia al estudio de los "Números y operaciones" se indica que, al finalizar la Educación Primaria, como resultado de los aprendizajes realizados en el área de Matemáticas, los alumnos habrán desarrollado la capacidad de:

1. Identificar en su vida cotidiana situaciones y problemas susceptibles de ser analizados con la ayuda de códigos y sistemas de numeración, utilizando las propiedades y características de éstos para lograr una mejor comprensión de los mismos y encontrar soluciones pertinentes.

2. Utilizar su conocimiento de los principales sistemas de numeración (decimal, romano...) para interpretar, valorar y producir informaciones y mensajes numéricos sobre fenómenos conocidos.

En el desarrollo del bloque temático sobre "Números y operaciones" el DCB incluye las siguientes orientaciones curriculares:

Hechos, conceptos y principios

1. Números naturales.

• Necesidad y funciones: contar, medir, ordenar, expresar cantidades o particiones, codificar informaciones, distinguir objetos y elementos, etc.

• Relaciones entre números (mayor que, menor que, igual a, diferente de, mayor o igual que, menor o igual que, aproximadamente igual) y símbolos para expresarlas.

2. Sistemas de numeración: decimal, romano, monetario, para medir ángulos y tiempo.

• Grafía de los números en los distintos sistemas.

• Base, valor de posición y reglas de formación de los números en los diferentes sistemas.

• Números cardinales y ordinales.

• Relaciones entre sistemas de numeración.

Procedimientos

1. Utilización de diferentes estrategias para contar de manera exacta y aproximada.

2. Interpretación de tablas numéricas y alfanuméricas (de operaciones, horarios, precios, facturas, etc.) presentes en el entorno habitual.

4. Elaboración y utilización de códigos numéricos y alfanuméricos para representar objetos, situaciones, acontecimientos y acciones.

Actitudes, valores y normas

1. Curiosidad por indagar y explorar sobre el significado de los códigos numéricos y alfanuméricos y las regularidades y relaciones que aparecen en conjuntos de números

2. Sensibilidad e interés por las informaciones y mensajes de naturaleza numérica apreciando la utilidad de los números en la vida cotidiana.

3. Rigor en la utilización precisa de los símbolos numéricos y de las reglas de los sistemas de numeración, e interés por conocer estrategias de cálculo distintas a las utilizadas habitualmente.

1.2. Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM 2000)

Las orientaciones curriculares del NCTM proponen que la educación matemática, con relación al bloque temático de "Números y operaciones", debe desarrollar el "sentido numérico" en los estudiantes. Los componentes del sentido numérico, que se deben lograr de manera progresiva desde los niveles de preescolar hasta secundaria, se describen con tres estándares generales. El primero de ellos es comprender los números, las distintas maneras de representarlos, las relaciones entre los números y los sistemas numéricos. Sobre este objetivo propone el logro de las siguientes expectativas para los Grados K-2 (Infantil y primer ciclo de primaria):

- contar con comprensión y reconocer "cuántos hay" en conjuntos de objetos;

- usar múltiples modelos para desarrollar una comprensión inicial del valor de posición y el sistema de numeración de base diez;
- desarrollar la comprensión de la posición relativa y magnitud de los números, de los aspectos cardinal y ordinal y sus conexiones;
- desarrollar un sentido de los números naturales, representarlos y usarlos de manera flexible, incluyendo la relación, composición y descomposición de los números
- conectar las palabras números y los numerales con las cantidades que representan, usando diversos modelos físicos y representaciones.

Para el nivel 3-5 se espera que los niños sean capaces de:

- comprender la estructura del valor de posición del sistema de numeración decimal y ser capaz de representar y comparar números naturales y decimales;
- reconocer representaciones equivalentes para los mismos números y generarlos mediante composiciones y descomposiciones de otros números;

Ejercicio:
1.Analizar las diferencias y semejanzas en las orientaciones curriculares siguientes respecto del estudio de los números naturales y la numeración,
- Diseño Curricular Base del MEC
- Las orientaciones curriculares de tu Comunidad Autónoma
- Principios y Estándares 2000 del NCTM.

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

2.1. El sentido numérico y su desarrollo

Desde los niveles de preescolar uno de los objetivos básicos de la educación matemática será el desarrollo progresivo del "sentido numérico", entendido como "una buena intuición sobre los números y sus relaciones", que debe desarrollarse gradualmente como resultado de explorar los números, usarlos en una variedad de contextos, y relacionarlos entre sí, superando el limitado aprendizaje de los algoritmos tradicionales. "El sentido numérico se concibe como una forma de pensar, por consiguiente no es una "lección" en el currículum de las matemáticas de Primaria, sino una manera de aproximarse al trabajo con los números en el aula" (Llinares, 2001, p. 152).

La comprensión y dominio de los números naturales pone en juego muchas ideas, relaciones y destrezas, por lo que podemos considerarlo como un aprendizaje complejo, que no se desarrolla de manera simple y automática. Con la expresión ‘sentido numérico’ hacemos referencia al complejo de nociones y relaciones que configuran el ‘sistema de los números naturales’. Incluye, por tanto, su origen en las actividades humanas de contar y ordenar colecciones de objetos, los instrumentos materiales inventados para dicha actividad, las operaciones y relaciones que se establecen entre ellas para la solución de problemas prácticos, y el propio sistema lógico–deductivo que organiza, justifica y estructura todos sus elementos.

El dominio intuitivo, flexible y racional de los números que caracteriza la apropiación del sentido numérico por parte del sujeto se inicia en preescolar, con las actividades de clasificación y ordenación de colecciones (uso de relaciones “más que”, “menos que”, “igual”, ...), el aprendizaje de la secuencia numérica hasta la decena, y continúa desarrollándose en los niveles escolares posteriores trabajando con números más grandes, fracciones, decimales, porcentajes, etc.

2.2. El aprendizaje de la sucesión de palabras numéricas

El número natural surge como respuesta a la pregunta, ¿cuántos hay? o ¿qué lugar ocupa este elemento dentro de un conjunto ordenado? Se construye, por tanto, alrededor de su significado como cardinal y ordinal y para ello es necesario contar. Pero esto exige a su vez la memorización de tramos de la sucesión numérica cada vez más amplios. Además, se necesita también estar en condiciones de recitar cualquier tramo de la sucesión numérica para saber cuáles son los números anterior y posterior a uno dado y para desarrollar técnicas orales de suma y resta.

La memorización de la sucesión de palabras numéricas puede conseguirse por medio de situaciones de recitado o de recuento. Pero el recuento empieza siempre desde uno y no permite consolidar tramos altos de la sucesión. Por ejemplo, para aprender que después del novecientos noventa y nueve viene el mil no podemos contar desde uno, tendremos que recitar la sucesión numérica desde un novecientos y pico. Hay que tener en cuenta, además, que las dificultades mayores se encuentran en los cambios de decena, centena, millar, etc., por lo que es necesario ejercitarse en tramos de la sucesión que contengan alguno de estos cambios.

En el dominio del recitado de las palabras numéricas el alumno puede encontrarse en alguno de los niveles siguientes:

- *Nivel cuerda.* El alumno es capaz de recitar un trozo de la sucesión numérica por evocación. El sonido de lo que está diciendo trae encadenados los sonidos siguientes, pero el niño no separa una palabra de otra. Este conocimiento verbal no puede aplicarse al recuento al no distinguir donde acaba una palabra y empieza otra.

- *Nivel cadena irrompible.* El niño sólo es capaz de recitar la sucesión numérica si empieza por el uno, pero ahora ya diferencia las distintas palabras numéricas. En este nivel ya se pueden asumir tareas de recuento.

- *Nivel cadena rompible.* Aquí el alumno es capaz de "romper" la cadena comenzando a recitar a partir de un número distinto del uno.

- *Nivel cadena numerable.* El niño es capaz, comenzando desde cualquier número, de contar un número determinado de palabras, deteniéndose en la que corresponda. Por ejemplo, contar cinco números a partir del ocho y decir el número final, el trece. Desde este dominio se afrontan con bastantes garantías la realización de las operaciones básicas del cálculo.

- *Nivel cadena bidireccional.* Es el máximo dominio al que se puede llegar. Supone las destrezas del nivel anterior aplicadas al recitado de la sucesión numérica hacia delante o hacia atrás. Contar bien desde el número a, b números hacia atrás, tardando aproximadamente el mismo tiempo que hacia delante, es el tipo de tarea que define al alumno que ha alcanzado este nivel de dominio de la sucesión numérica.

Aunque estos niveles definen una progresión en el aprendizaje del recitado de la sucesión numérica, hay que entender que no todos los niños pasan por todos esos niveles y también que un mismo niño puede tener un nivel de dominio de un cierto tramo numérico y otro nivel distinto para otro tramo numérico. Es decir, un niño puede estar en un nivel de "cadena numerable" en el tramo del uno al diez y en un nivel de "cadena irrompible" en el tramo del diez al veinte. El aprendizaje de las palabras numéricas se va haciendo por tramos progresivos que se suelen consolidar en el siguiente orden: primero las palabras uno, dos y tres, después el tramo del uno al cinco seguido del tramo del cinco al diez. En fases posteriores los niños van consolidando los siguientes tramos: del diez al veinte, del veinte al cincuenta, del cincuenta al cien, del cien al doscientos, del doscientos al quinientos, del quinientos al mil, del mil al diez mil, del diez mil al cien mil, del cien mil al millón, del millón en adelante.

2.3. El aprendizaje del recuento y del significado del número como cardinal y ordinal

Los distintos estados de conocimiento de los niños sobre el significado del número pueden resumirse como sigue:

- *Percepción temprana de cardinales.* Los niños pequeños, entre dos y cuatro años, son capaces de reconocer el cardinal de conjuntos de uno a tres o cuatro elementos sin necesidad de contar. El cardinal es percibido globalmente por simple inspección visual del conjunto. En cambio, cuando se trata de cardinales mayores, los niños ya no saben decirlos correctamente porque eso exige contar y en esta etapa no tienen asumidos los principios en los que se basa dicha técnica.

- *Percepción prioritaria de ordinales.* Esta etapa corresponde a niños con edades entre tres y cinco años. Ahora los niños ya asumen algunos de los principios que permiten efectuar un recuento. En concreto, el principio del orden estable (las palabras numéricas deben decirse siempre en el mismo orden, empezando por el uno y sin omitir ninguna) y el de la correspondencia uno a uno (cada objeto del conjunto contado debe recibir una palabra numérica y sólo una)[5]. La práctica del recuento pone de manifiesto el sentido ordinal del número por cuanto la palabra numérica que se adjudica a cada objeto es su ordinal. Sin embargo, en esta fase no se asume el principio de cardinalidad, es decir, los niños no entienden que el último ordinal sea, al mismo tiempo, el cardinal de todo el conjunto. Para ellos, la respuesta a la pregunta, ¿cuántos hay?, consiste en la enumeración de todos los objetos de la colección.

- *Percepción prioritaria de cardinales.* En esta etapa, los niños, entre cuatro y siete años, asumen el principio de cardinalidad (la última palabra de un recuento indica, no sólo el ordinal del último elemento señalado, sino también el cardinal del conjunto) con lo que pueden responder correctamente a la pregunta ¿cuántos hay? después de haber efectuado un recuento. Pero al centrar su atención en los cardinales sufren una cierta regresión respecto a los ordinales y aparecen, por ejemplo, dificultades al obtener un ordinal. Se niegan a detener el recuento en el elemento en cuestión, ya que tienen muy claro el principio de la correspondencia uno a uno y pretenden adjudicar palabras numéricas a todos los elementos del conjunto. También tienen dificultades para reinterpretar un cardinal como ordinal, es decir, una vez que han dicho que diecisiete es el número de elementos de un cierto conjunto, les resulta difícil volver a entenderlo como el ordinal del último elemento señalado. Esto les impide, entre otras cosas, adoptar técnicas de contar a partir de uno de los sumandos para obtener una suma.

[5] Esto no quiere decir que los niños en esta etapa no cometan errores en el recuento. De hecho, las equivocaciones al contar son bastante frecuentes incluso en los adultos. Lo que quiere decir es que son razonablemente conscientes de los principios a los que nos acabamos de referir y procuran respetarlos al efectuar los recuentos.

Una buena concepción[6] del número como cardinal y ordinal supone asumir la doble condición de cada palabra de un recuento como ordinal de un elemento y, a la vez, cardinal de los elementos contados hasta ese momento. Esto permite interpretar las palabras de un recuento numérico, bien como ordinales, bien como cardinales, en función del problema que haya que resolver.

En lo que se refiere a la técnica de contar, los errores que se observan pueden clasificarse en:

- *Errores de recitado.* Errores ligados a un recitado incorrecto de la sucesión numérica, consistentes en: saltarse palabras numéricas, decirlas en otro orden, repetirlas, introducir palabras no numéricas, etc. Pueden deberse a que el niño no tiene asumido el principio del orden estable o a una memorización incorrecta del tramo numérico que recita.

- *Errores de coordinación.* Errores ligados a la falta de coordinación entre la emisión de la palabra y el señalamiento del objeto. Por ejemplo, el niño dice "cuatro" señalando dos objetos o dice "dos tres" señalando un único objeto. Pueden deberse al desconocimiento del principio de la correspondencia uno a uno, al hecho de no saber donde empiezan y acaban las distintas palabras numéricas (nivel cuerda del recitado) o a una falta de coordinación entre la emisión vocal y el movimiento de la mano.

- *Errores de partición.* Errores asociados al hecho de "no llevar la cuenta", es decir, de no distinguir correctamente lo ya contado de lo que falta por contar. Consisten en volver a contar un objeto ya contado o dejar objetos sin contar. Se producen por desconocimiento del principio de la correspondencia uno a uno o por una defectuosa puesta en práctica del mismo, debida al desconocimiento o mala utilización de las técnicas auxiliares del recuento (técnicas de diseño de un camino, marcado, separación o realización de una partición)

2.4. El aprendizaje del orden numérico

El orden numérico se construye alrededor de situaciones de comparación: comparación entre ordinales para decidir quién va antes y comparación entre cardinales para decidir a qué conjunto le sobran o faltan elementos cuando construimos parejas con un elemento de cada conjunto. Decimos que cinco es menor que ocho porque si un elemento es el quinto estará antes o será anterior en el tiempo al octavo (significado del orden entre ordinales). También decimos que cinco es menor que ocho porque si emparejamos cinco tazas con ocho platos quedarán platos sin taza (significado del orden entre cardinales). Esta última definición también lleva implícita la idea de que todos los conjuntos que tienen el mismo cardinal pueden emparejarse sin que quede ningún elemento sin pareja.

El orden numérico tanto en su sentido ordinal como cardinal es asumido muy pronto por los niños. En el caso de orden entre ordinales, el éxito a la hora de ordenar dos números va ligado a la memorización del tramo de la secuencia numérica que los incluye. El niño capaz de recitar del uno al diez ya puede decir, por ejemplo, que "el seis va antes que el nueve". Sin embargo, ese mismo niño puede no saber que quince es menor que diecisiete si no tiene memorizado el tramo del diez al veinte. La memorización de tramos cada vez más amplios de la sucesión numérica permite a los niños ampliar las parejas de números susceptibles de ser ordenadas. Finalmente, la familiarización con las reglas de formación de las palabras

[6] Una concepción es el conjunto de informaciones (conocimientos para la acción y saberes para la interacción social) que un individuo tiene acerca de una noción matemática.

numéricas junto con el conocimiento de la escritura del número, conduce a los niños a asumir las reglas formales del orden numérico:

a) Un número es menor que otro si tiene menos cifras.

b) Si dos números tienen el mismo número de cifras, será menor aquel que tenga menor la cifra de orden superior.

c) Si las cifras de orden superior coinciden, se examinan las cifras de orden siguiente hasta encontrar algún caso en que no coincidan y entonces se aplica la regla b.

En cuanto al sentido cardinal del orden, en un primer momento los niños son capaces de percibir globalmente si en un conjunto hay más elementos que en otro, siempre que esa diferencia sea apreciable por simple inspección visual. Sin embargo, el establecimiento del orden entre los cardinales de dos conjuntos por medio del emparejamiento (construcción de parejas que contengan un elemento de cada conjunto) o del recuento no es una habilidad temprana; de hecho, hay niños de seis y siete años que, en esas condiciones, tienen dificultades para decidir qué conjunto tiene más o menos elementos.

A este respecto es esclarecedor el comportamiento de los niños en la llamada *experiencia de la conservación del número* propuesta por Jean Piaget. Consiste en lo siguiente:

- Se le presentan aun niño un número reducido de objetos, por ejemplo, entre seis y nueve fichas azules puestas en fila. A continuación, el entrevistador le pide al niño que ponga tantas fichas rojas como fichas azules hay, una ficha roja por cada ficha azul. Una vez que el niño ha emparejado cada ficha azul con una ficha roja, el entrevistador le pregunta si hay el mismo número de fichas azules que de fichas rojas. Si el niño dice que sí, el entrevistador modifica la fila de fichas rojas dejando una mayor distancia entre dos fichas. De esa manera, la fila de fichas rojas ocupa más espacio que la de fichas azules.

Después de eso, se pregunta al niño si ahora sigue habiendo las mismas fichas azules que rojas.

En la resolución de esta tarea los niños se comportan de las siguientes maneras:

- Algunos no saben colocar un número de fichas rojas igual al de fichas azules. No conocen la técnica de emparejamiento ni tampoco se les ocurre contar. Son niños que pueden tener una percepción global de dónde hay más o menos elementos, pero que no usan la correspondencia uno a uno para comparar cardinales.

- Otros son capaces de colocar un número de fichas rojas igual al de azules, están seguros de que los dos cardinales son iguales, pero cuando el entrevistador modifica una de las filas haciendo que ocupe más espacio dicen que en esa fila hay más fichas. Se trata de niños que son capaces de usar una técnica de emparejamiento para comparar cardinales de conjuntos, pero en cuanto visualmente ese emparejamiento desaparece dejan de verlo y vuelven a una comparación global basada en la percepción visual de que uno de los conjuntos ocupa más espacio.

- Por último, tenemos a los niños que a pesar de la modificación espacial efectuada por el entrevistador siguen afirmando que los dos conjuntos de fichas tienen el mismo número porque "no se ha puesto ni quitado ninguna ficha". En este caso, los niños no sólo son capaces de usar la correspondencia uno a uno entre conjuntos para comparar cardinales, sino que siguen "viéndola", aunque físicamente haya desaparecido, y no se dejan distraer por consideraciones de otro orden.

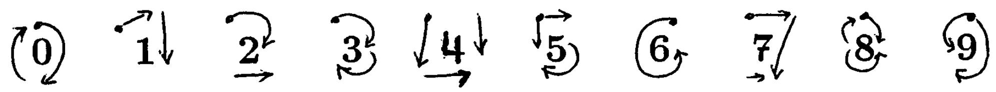
Lo más sorprendente de esta experiencia es que ha puesto de manifiesto que prácticamente todos los niños pequeños son "no conservadores" y que es necesario esperar a que tengan alrededor de siete años para que acepten mayoritariamente que el número de fichas sigue siendo el mismo.

Una última consideración a tener en cuenta es que la tarea de ordenar dos números es muy diferente de la de ordenar tres o más números. De hecho, se ha observado que niños que son capaces de ordenar tres números de dos en dos no son capaces de ordenarlos a base de decir cual es el menor, el mediano y el mayor. En una fase posterior se da también el caso de que, una vez ordenados ciertos números, el niño es incapaz de introducir en el lugar adecuado un número que se le ha dado posteriormente.

2.5. El aprendizaje del sistema escrito de numeración

El aprendizaje del sistema escrito de numeración se desarrolla en dos etapas: la de la lectura y escritura de las cifras (números del O al 9) y la de la lectura y escritura de números de dos o más cifras, lo que supone asumir las reglas de representación de números propias de un sistema posicional de base diez.

En lo que se refiere a las cifras, los niños deben aprender a reconocerlas y a escribirlas siguiendo el sentido de recorrido oportuno. Para las personas diestras los sentidos de recorrido más adecuados son los siguientes:



Los errores más frecuentes que se observan en el trabajo de los niños son:

- *Errores de inversión de la grafía.* Algunos niños confunden el 6 y 9; otros escriben ,

 en lugar de 2,  en lugar de 3,  en lugar de 5.

- *Errores caligráficos.* La mala caligrafía puede llevar a un niño a confundir sus propias cifras cuando tiene que volver a leerlas. Se puede confundir el 1 con el 2, el 3 con el 5, el 6 o el 9 con el 0, etc.

- *Errores de recorrido.* Es frecuente que los niños se acostumbren a escribir las cifras siguiendo recorridos anómalos. Esto contribuye a empeorar la caligrafía y, además, puede fomentar los errores de inversión ya comentados y la escritura de derecha a izquierda, en vez de izquierda a derecha, lo que crea problemas cuando hay que escribir números de varias cifras.

En cuanto al valor de posición de las cifras, diversas experiencias muestran que la comprensión que tienen los niños de ese convenio es muy limitada, incluso cuando llevan ya mucho tiempo escribiendo números de varias cifras. A continuación vamos a describir dos de esas experiencias.

Experiencia de Kamii sobre reconocimiento de la decena

- El entrevistador presenta a un niño dieciséis fichas y le pide que las cuente, las dibuje en un papel y escriba el número 16. Una vez hecho eso, el entrevistador rodea el 6 y le pide al niño que señale en el dibujo de las fichas lo que corresponde a ese número. Después rodea el 1 y le pide que señale en el dibujo la parte que corresponde a ese número.

Este experimento se realizó con niños de entre ocho y once años de edad (por supuesto, todos ellos escolarizados y sabiendo escribir números de varias cifras) y sus respuestas pueden clasificarse como sigue:

- Las cifras se interpretan como ordinales o como etiquetas: el 6 corresponde a una ficha y el 1 a otra ficha distinta (22%).

- El 6 representa seis fichas y el 1, una ficha (23%).

- El 6 representa seis fichas y el 1 es una decena, pero, a la hora de indicarlo en el dibujo, se señala una sola ficha (12%).

- El 6 representa seis fichas y el 1 las diez fichas restantes (43%.

Entre los niños de ocho años sólo el 20% relaciona el 1 con las diez fichas.

Experiencia de Ross del agrupamiento en decenas

- El entrevistador presenta al niño 48 alubias y 9 tazas. No le dice al niño cuántas alubias hay ni le pide que las cuente. Lo que le pide es que ponga diez alubias en cada taza. Una vez acabada la tarea sobre la mesa quedan 4 tazas llenas y 8 alubias sueltas. Entonces se pregunta al niño cuántas alubias hay en total.

Las respuestas de los niños (entre ocho y once años) fueron como sigue:

- No saben decir cuántas hay (5%).

- Las vuelven a contar todas de una en una (15%.

- Las cuentan por decenas ("diez, veinte, treinta, cuarenta") y al final añaden el ocho. Algunos niños multiplican diciendo "cuatro de diez son cuarenta" o "cuatro por diez son cuarenta"(80%).

Ningún niño dice directamente "cuarenta y ocho". Además, entre los niños de ocho años sólo el 60% cuenta de diez en diez, el otro 40% cuenta de uno en uno, o no cuenta.

Estas experiencias muestran que la noción del valor posicional de las cifras se va construyendo lentamente y que los niños aprenden a escribir números sin ser enteramente conscientes del valor que representa cada cifra. De hecho, los niños saben que cuarenta y dos se escribe con un cuatro y un dos porque los dos números empiezan por la sílaba "cua". Son las similitudes de los sonidos las que permiten escribir y leer correctamente números de dos cifras, más que una correcta interpretación del número en términos de decenas y unidades.

Los errores más frecuentes en la escritura de números de varias cifras son los siguientes:

- *Invertir el orden de las cifras.* Es propio de la escritura de números de dos cifras y consiste en intercambiar la cifra de las decenas con la de las unidades.

- *Incorporar la potencia de la base.* Consiste en escribir los números tal como se hablan, es decir, explicitando las potencias de la base, como sucede en nuestro sistema oral. Por ejemplo, tres mil doscientos veintitrés se escribiría como 300020023.

- *Suprimir o añadir ceros.* En números grandes con pocas cifras significativas es frecuente que los niños se equivoquen en el número de ceros intermedios que hay que escribir. Por ejemplo, mil cuatro puede aparecer escrito como 104 o como 10004.

Además, se observan dificultades de lectura y escritura de números muy grandes tanto en niños como en adultos debido a que la escuela no suele ejercitar a los alumnos en ello y, desde el punto de vista social, se trata de un conocimiento poco necesario.

2.6. Conocimientos previos a la enseñanza del valor de posición de las cifras

Para entender que el número treinta y cinco se escribe con un tres y un cinco hay que "verlo" descompuesto en tres decenas y cinco unidades. Pero eso exige saber que "diez más diez son veinte, y más diez son treinta", es decir, hay que saber contar de diez en diez y que cuando a una decena se le suma otra se obtiene la decena siguiente. Una vez entendido que tres decenas es lo mismo que treinta unidades, hay que estar familiarizado con el hecho de que treinta más cinco son treinta y cinco.

En otras palabras, para que un niño pueda darle sentido a los razonamientos que se organizan alrededor del valor de posición de las cifras tiene que estar familiarizado con determinadas técnicas orales de suma. Esto implica que las situaciones aditivas que estudiaremos más adelante deben comenzarse antes de enseñar la escritura de números de dos cifras.

Los conocimientos orales previos a dicha enseñanza son los siguientes:

- Contar de uno en uno y de diez en diez.

- Ser capaz de interpretar como cardinales u ordinales las palabras numéricas correspondientes a los números de dos cifras.

- Saber que si se suma una unidad se obtiene el número siguiente.

- Saber que si se suma una decena se obtiene la decena siguiente.

- Sumar oralmente decenas con unidades.

El aprendizaje de estos conocimientos puede conseguirse mediante situaciones de recitado, de recuento, de orden y aditivas. Pero además, se necesitan ciertos conocimientos de escritura. Son los siguientes:

- Manejar con bastante soltura el lápiz y el papel.

- Leer y escribir las cifras.

- Saber interpretar como cardinales y ordinales las cifras que aparecen en un mensaje escrito.

La adquisición de la primera de estas condiciones depende de la puesta en marcha de situaciones de manejo del lápiz y el papel que ayuden a desarrollar la psicomotricidad fina que la escritura requiere. Estas situaciones no son específicamente matemáticas por lo que no las hemos descrito. En cuanto a las otras dos condiciones, su aprendizaje se conseguirá por medio de las situaciones de trazado de cifras y de comunicación descritas en el apartado anterior.

Ejercicio 2: Diagnóstico de competencias y comprensión sobre cardinación y ordenación

En la tabla siguiente se incluye una relación de tareas de manipulación de objetos en situaciones aritméticas que se pueden usar para el diagnostico inicial (o la evaluación final) de las competencias y comprensión de los alumnos de 1er curso de primaria sobre cardinación y ordenación. Utiliza esta pauta con algún niño de dicho nivel. Compara tus resultados con la información dada en esta sección.

Manipulación de objetos en situaciones aritméticas

a) Contar el número de elementos de un conjunto.
A ver, ¿cuántas fichas tenemos aquí?, cuéntalas.
b) Construir un conjunto con un número dado de elementos
Vamos a coger 15 fichas. Venga, empieza,colócalas aquí.
c) Dados dos conjuntos, decir cuál de ellos tiene más o menos elementos.
Mira, aquí tenemos fichas negras y aquí fichas rojas. ¿Dónde hay más fichas?
d) Construir un conjunto que tenga el mismo número de elementos que otro dado.
Mira, aquí tenemos fichas rojas. Vamos a poner un número igual de fichas azules. ¿Cómo lo haremos?
e) Decir el ordinal de un elemento.
Vamos a hacer una fila de fichas. Ésta es la primera, ésta la segunda, ¿y ésta?
f) Colocar un elemento de ordinal dado
Mira, en esta fila hay que colocar esta ficha para que sea la cuarta, ¿cómo lo haremos?
g) Añadir elementos a un conjunto ya contado (con el conjunto inicial tapado o sin tapar)
Aquí hemos contado 17 fichas, ¿verdad? Si añadimos estas otras, ¿Cuántas tendremos ahora?
Aquí hemos contado 17 fichas, ¿verdad? Si añadimos estas 3, ¿cuántas tendremos ahora?
h) Quitar elementos a un conjunto ya contado (con el conjunto inicial tapado o sin tapar)
Aquí hemos contado 17 fichas, ¿verdad? Si quitamos éstas, ¿cuántas tendremos ahora?
Aquí hemos contado 17 fichas, ¿verdad? Si quitamos 3, ¿cuántas tendremos ahora?
i) Adivinar el cardinal de un conjunto sabiendo su cardinal cuando se le añaden o suprimen elementos.
Mira, aquí tenemos unas fichas escondidas. No sabemos cuántas hay, pero yo sé que si añadimos 3 más, en total hay ocho. ¿Cuántas fichas hay escondidas?.
j) Modificar el ordinal de un elemento añadiendo o quitando elementos anteriores.
Mira, esta ficha está la quinta. Si ponemos delante estas otras dos, ¿ahora cómo estará?
Mira, esta ficha está la quinta. ¿Cuántas fichas se tienen que ir de la cola para que quede la tercera?
k) Comparar dos conjuntos y decir cuántos elementos más o menos tiene uno que otro.
Dónde hay más fichas, ¿aquí o aquí?, ¿cuántas más?
l) Comparar dos conjuntos diciendo cuántos elementos hay que añadir a uno de ellos para que se iguale con el otro.
Aquí tenemos 12 fichas azules y aquí 15 rojas. ¿Cuántas fichas azules tenemos que añadir para tener tantas como rojas?
m) Construir un conjunto que tenga un número determinado de elementos de más o de menos que otro ya dado.
Aquí tenemos 23 fichas. Vamos a hacer otro montón que tenga 4 fichas menos que éste.
n) Comparar dos ordinales, diciendo cuántos elementos hay entre los dos.
Si sabemos que esta ficha es la sexta y ésta la novena, ¿cuántas fichas tendremos que poner entre

las dos?

ñ) Hacer torres de 10 elementos a partir de un número dado de elementos.

Hemos contado 25 fichas. ¿Cuántas torres de diez fichas podemos hacer? Vamos a hacerlas. ¿Cuántas fichas sobran?

o) Realizar acciones de compra-venta de objetos diversos

p) Contar objetos de dos en dos, de cinco en cinco, de diez en diez, de cien en cien , de mil en mil.

q) Recorrer la sucesión numérica escrita saltando de dos en dos, de tres en tres, etc., hacia delante y hacia atrás.

r) Reiterar acciones de añadir o quitar.

Aquí tenemos 3 fichas. Si añadimos otras 3, ¿cuántas tenemos ahora? ¿Y con 3 más?
Si de estas 22 fichas empezamos a quitar 3, y 3, y 3, ..., ¿cuántas quedarán al final?

s) Repartir un número dado de objetos entre un número dado de individuos.

Vamos a repartir estas 20 fichas en cuantro montones iguales. ¿Cuántas fichas hay en cada montón?

t) Repartir un número dado de objetos entre varios individuos de modo que a cada uno le corresponda un número dado de objetos.

Vamos a repartir estas 20 fichas en grupos de 5. ¿Cuántos grupos podremos hacer?

u) Dado cierto número de individuos, adjudicar a cada uno de ellos un número dado de objetos.

Vamos a hacer 4 montones de 5 fichas cada uno. ¿Cuánatas fichas necesitaremos?

v) Comprar-vender varios objetos de un mismo precio.

w) Construir conjuntos que tengan dos veces, tres veces, etc. más elementos que otro dado.

x) Construir conjuntos que tengan la mitad, la tercera parte, etc. que otro dado.

y) Formar todas las combinaciones posibles entre varios elementos.

Si tengo tres pantalones y dos camisas, ¿de cuántas maneras distintas me puedo vestir?

z) Medir longitudes, áreas, capacidades, masas con unidades no convencionales.

3. SITUACIONES[7] Y RECURSOS

3.1. Situaciones de recitado de la sucesión numérica

Las variables didácticas a manipular a la hora de proponer tareas de recitado y los valores entre los que varían, son los siguientes:

Tipo de sucesión oral: Cardinal u ordinal.

Números de comienzo y final del recitado: Cualquier número natural.

Sentido del recitado: Hacia delante o hacia atrás.

Número de términos del recitado: Con o sin control del número de términos que se recitan.

Salto: De uno en uno, de dos en dos (por pares e impares), de cinco en cinco (por los múltiplos de cinco), de diez en diez, de veinticinco en veinticinco (por los múltiplos de veinticinco), de cincuenta en cincuenta (por los múltiplos de cincuenta), de cien en cien, de doscientos cincuenta en doscientos cincuenta (por los múltiplos de doscientos cincuenta), de

[7] El término situación lo usamos con dos sentidos diferentes, como tarea o actividad matemática a realizar, y como situación didáctica. En este último caso, además de la tarea matemática propiamente dicha, se incluyen las intervenciones del profesor, las interacciones entre alumnos, el tiempo asignado y demás recursos utilizados en el estudio.

quinientos en quinientos (por los múltiplos de quinientos), de mil en mil, de diez mil en diez mil, de cien mil en cien mil, de un millón en un millón, etc.

Ejercicios:

3. Preparar una secuencia de tareas para alumnos de 1er curso en las que se incluyan una muestra de valores de las variables didácticas identificadas en el estudio del recitado de la sucesión numérica

4. Analizar en un libro de texto de primaria si se incluyen o no, tareas o actividades de recitado de la sucesión numérica y los valores de las variables didácticas tenidas en cuenta.

Las situaciones didácticas, globalmente consideradas, quedan determinadas por otras variables distintas de las correspondientes a las tareas, entre las que destacamos:

Forma de realizar la tarea: Individualmente, colaborando en grupo pequeño homogéneo, colaborando en grupo pequeño heterogéneo, colaborando en grupo grande, todos a la vez en grupo pequeño o grande.

Intervención del profesor: El profesor, una vez planteada la tarea, no contesta a ninguna pregunta, contesta sólo las preguntas que aclaran la consigna dada, hace sugerencias sobre cómo realizar la tarea, colabora con los niños en la resolución de la tarea, dice a los niños, bien personalmente o bien a través de otro niño, lo que tienen que hacer.

Tiempo de realización de la tarea: Se da el tiempo necesario para que todos los alumnos, todos menos unos pocos, la mitad de la clase, sólo unos pocos, realicen la tarea.

3.2. Situaciones de cardinalidad sin recuento

Es importante que los niños se acostumbren a determinadas configuraciones espaciales ("constelaciones") que permiten conocer el cardinal de un conjunto sin necesidad de contar. Por ejemplo, ante una constelación de puntos como la siguiente:

```
*   *
  *
*   *
```

los adultos no necesitamos contar para saber que ahí hay cinco puntos, pues estamos familiarizados con ella a través de los dados, las fichas del dominó y las cartas de la baraja. Las situaciones de cardinalidad sin recuento fomentan el reconocimiento visual de cardinales, habilidad necesaria en las tareas iniciales de suma y resta.

Las variables de las situaciones[8] de cardinalidad sin recuento son:

Numerosidad de la situación: De uno a veinte.

Sentido de la situación: De reconocimiento (del cardinal del conjunto) o de construcción (de un conjunto de cardinal dado.

[8] Situación, en el sentido de tarea o actividad matemática.

Material utilizado: Dedos de las manos, dados, cartas de la baraja, fichas de dominó, regletas Cuisenaire, regletas con tapa, ábaco.

Ejercicios:

5. Preparar una secuencia de tareas para alumnos de 1er curso en las que se incluyan una muestra de valores de las variables didácticas identificadas en el estudio de la cardinalidad sin recuento.

6. Analizar en un libro de texto de primaria si se incluyen o no, tareas o actividades de cardinalidad sin recuento y los valores de las variables didácticas tenidas en cuenta.

3.3. Situaciones de recuento: obtención de cardinales y ordinales

En general, la escuela no enseña a contar más allá de los primeros números. Se realizan actividades de contar para dar sentido a los números hasta el diez, pero a partir de ahí los números se construyen como combinación de decenas y unidades. Por ejemplo, treinta y cinco objetos aparecen descompuestos en tres decenas y cinco unidades, con lo que no hace falta contar más allá de diez para saber cuántos objetos son.

Nosotros entendemos que lo que da sentido al número como cardinal y ordinal es el recuento y que, por tanto, es necesario contar objetos una y otra vez para establecer el significado de los distintos números. Además, no basta con dar sentido a los números del uno al diez, sino que hay que realizar actividades de recuento que pongan a los niños en situación de manipular cardinales y ordinales de uno a cien y, en algunos casos, de más de cien objetos.

Por otra parte, también es necesario aprender las distintas variantes de la técnica de recuento. No es lo mismo contar para obtener un cardinal que contar para obtener un ordinal. En el primer caso hay que contar todos los elementos y no importa el orden en que se cuenten; en el segundo caso, sólo se cuenta hasta el elemento en cuestión y siguiendo un orden predeterminado de antemano. Además, la tarea de adjudicar a cada elemento una palabra numérica, y sólo una, puede exigir distintas técnicas auxiliares, dependiendo de la situación: seguir un camino, separar los objetos, marcarlos o efectuar particiones. Por último, el tamaño de la colección a contar o sus especiales características pueden propiciar el uso de recuentos abreviados: de dos en dos, de cinco en cinco, de diez en diez, etc. o, por ejemplo, contar grupos de cien y después contar de cien en cien para obtener el total, etc.

Las variables didácticas que intervienen en las situaciones de recuento son las siguientes:

Significado del número resultado del recuento: Cardinal u ordinal.

Numerosidad de la colección: De uno en adelante.

Sentido de la situación: De cálculo (del cardinal de un conjunto o del ordinal de un elemento) o de construcción (de un conjunto de cardinal dado o de un elemento de ordinal dado.

Tipo de objetos:

- Sucesos.

- Objetos movibles al alcance de la mano.

- Objetos al alcance de la mano, pero no movibles u objetos dibujados
  - con configuración geométrica típica
  - con configuración que indica un camino
  - con configuración indiferenciada.
- Objetos a la vista, pero no al alcance de la mano.
- Objetos evocados.

Salto: De uno en uno, de dos en dos, de cinco en cinco, de diez en diez, de veinticinco en veinticinco, de cincuenta en cincuenta, de cien en cien, de mil en mil, etc.

Estimación del resultado: Con o sin exigencia previa de estimación del resultado.

Ejercicios:

7. Preparar una secuencia de tareas para alumnos de 1er curso en las que se incluyan una muestra de valores de las variables didácticas identificadas en el estudio de la obtención de cardinales y ordinales.

8. Analizar en un libro de texto de primaria si se incluyen o no, tareas o actividades obtención de cardinales y ordinales, y los valores de las variables didácticas correspondientes.

3.4. Situaciones de orden numérico

Las variables didácticas que intervienen en las situaciones de orden numérico son las siguientes:

Significado del número: Cardinal u ordinal.

Tamaño del número mayor: De uno en adelante.

Tamaño de la diferencia: Grande (diferencia que permite ver de forma ostensible cuál es el conjunto de cardinal mayor), o pequeña (diferencia que obliga a emparejar o contar para decidir qué número es mayor.

Número de términos de la comparación: Dos, tres o más.

Grado de formalización de la situación: Contextualizada o formal

Uso de materiales: Con o sin manipulación de materiales.

Tipo de material:

- Objetos movibles al alcance de la mano y físicamente cercanos.
- Objetos movibles al alcance de la mano, pero físicamente separados.
- Objetos al alcance de la mano, pero no movibles u objetos dibujados

- Objetos a la vista, pero no al alcance de la mano.

Tamaño del material: Los dos conjuntos que se comparan están formados por objetos de un tamaño parecido o muy distintos en tamaño.

Estimación del resultado: Con o sin exigencia previa de estimación del resultado.

Institucionalización de las reglas formales que definen el orden: Con o sin explicitación de dichas reglas.

Dentro de las situaciones de orden numérico, son especialmente importantes aquellas que ponen de manifiesto el hecho de que dos conjuntos con el mismo cardinal pueden emparejarse sin que sobre ni falte ningún objeto. Una de ellas es la siguiente:

Situación fundamental[9] de cardinalidad

<u>Condiciones materiales</u>: El profesor debe situar en un lugar, cierto número de objetos A y en otro, cierto número de objetos B. Los objetos deben estar lo suficientemente separados para que el niño que esté cogiendo objetos B no tenga a la vista los objetos A. Además, el número de objetos A debe ser lo suficientemente grande para que el niño no pueda imaginárselos uno a uno.

<u>Consigna del profesor dirigida al alumno</u>: "Mira, aquí tenemos objetos A y allí objetos B. Tienes que ir a donde están los objetos B y traer un objeto B por cada objeto A que tenemos aquí".

<u>Actuación del profesor</u>: El profesor no debe permitir que el alumno haga pruebas, trayendo los objetos en varias veces. Debe exigir que los objetos se traigan en una sola vez y si el niño se equivoca debe llevarse todos los objetos y empezar de nuevo.

<u>Conocimiento en juego</u>: La resolución correcta de esta situación exige saber que cuando dos colecciones tienen el mismo cardinal, al emparejarlas ningún objeto se quedará sin pareja. Por tanto, si se cuenta la colección A para obtener su cardinal y se construye un conjunto de objetos B con el mismo cardinal, quedará resuelto el problema.

Ejercicios:

9. Preparar una secuencia de tareas para alumnos de 1er curso en las que se incluyan una muestra de valores de las variables didácticas identificadas en el estudio del orden numérico.

10. Analizar en un libro de texto de primaria si se incluyen o no, tareas o actividades de ordenación numérica y los valores de las variables didácticas tenidas en cuenta.

[9] Se le llama así porque su resolución exige el conocimiento de la propiedad fundamental de los cardinales.

3.5. Situaciones de lectura y escritura de números de una cifra

La enseñanza de las cifras exige dos tipos de situaciones: las de trazado de las cifras y las de comunicación.

Situaciones de trazado de las cifras

Las variables didácticas a considerar serían las siguientes:

Tamaño de la cifra: Del 0 al 9.

Método de trazado: Sobre cifra ya hecha o trazado libre imitando el modelo.

Instrumento utilizado: Dedos o lápices.

Material utilizado: Cifras recortadas en papel de lija, arena, talco, pintura de dedos, pinturas varias, papel, etc.

En un primer momento conviene que la tarea se realice individualmente y en presencia del profesor. Para ello, éste debe presentar al niño una cifra recortada en papel de lija y pegada en una cartulina o plancha de madera y mostrarle cómo recorrerla con el dedo. A continuación, el niño debe "hacer la cifra" varias veces, siguiendo el recorrido indicado por el profesor. De esta manera, y dado que el papel de lija raspa y obliga a los niños a ser conscientes del trazo que realizan, se van asumiendo los trazados de las distintas cifras. Posteriormente, se puede pedir al niño que dibuje la cifra por sí mismo con el dedo sobre arena o con pintura de dedos sobre papel. Más adelante, se le puede decir que la trace con lápiz y papel.

Hay que tener en cuenta que en las situaciones de trazado de las cifras no se pretende que el niño identifique la palabra con el símbolo escrito; no son, por tanto, situaciones estrictas de lectura y escritura de cifras. Se trata de que el niño aprenda la técnica de trazado de las diferentes cifras, pero se supone que el profesor les dice a los niños de qué cifra se trata y que cuando los niños la escriben, o bien recorren una cifra ya hecha, o bien la copian teniendo el modelo delante. Son las situaciones de comunicación las que tienen como objetivo prioritario el que el niño relacione el símbolo oral con el símbolo escrito y dé a este último un sentido como cardinal y ordinal.

Situaciones de comunicación escrita de números de una cifra

Las variables didácticas a tener en cuenta serían las siguientes:

Significado del número: Cardinal u ordinal.

Tamaño del número: Del 0 al 9.

Tipo de situación: De petición o de recuerdo.

Tipo de codificación: Lectura (pasar del escrito al oral), escritura (pasar del oral al escrito) o las dos.

Material utilizado: Todo tipo de objetos que se puedan contar, materiales estructurados[10], papel y lápiz, banda en la que aparezcan escritas las cifras en orden (banda numérica), cajas o sobres para guardar objetos, etc.

En estas situaciones se pretende que los niños se planteen el problema de comunicar cantidades por escrito. En las situaciones de petición los niños tienen que pedir por escrito a otros niños o al profesor, o el profesor a los niños, que construyan un cierto cardinal u ordinal. En las de recuerdo se les dice que tomen nota escrita de un cierto cardinal u ordinal para poder recordarlo días después.

En un primer momento no hay que exigir que los niños usen las cifras. De hecho, estas situaciones se pueden plantear sin que los niños las conozcan. Las estrategias iniciales serán las de dibujar los objetos o la de dibujar una colección de muestra con el mismo cardinal: dedos, palotes, etc. Si se pone a disposición de los niños una banda numérica con las cifras escritas del 1 al 9 los niños pueden leer y escribir los mensajes cifrados con más facilidad, pues pueden encontrar la cifra contando.

3.6. Situaciones de lectura y escritura de números de varias cifras

La enseñanza del sistema de numeración escrito se lleva a cabo planteando situaciones de agrupación y de comunicación.

Situaciones de agrupación de cardinales

En un primer momento, se parte de conjuntos de objetos de cardinal dado y se pide a los niños que distribuyan los objetos en grupos de diez, o bien, dados varios grupos de diez y un resto, que den el cardinal del conjunto total. Posteriormente se agrupa por centenas y después por millares, pero para hacer estas agrupaciones es necesario trabajar con un material estructurado que permita hacerlas con rapidez, como el ábaco o el dinero ficticio.

Son situaciones que, en un principio, se deben resolver oralmente y en las que la estimación previa del resultado juega un papel importante. Una vez presentadas varias de estas situaciones, conviene pedirles a los niños que estimen cuántos grupos de diez van a salir antes de iniciar ninguna acción. De esta manera, los niños se van familiarizando con el hecho de que en un treinta y tantos se obtienen tres decenas, en un cincuenta y tantos, cinco, etc. Cuando este conocimiento empieza a afianzarse es el momento de presentar la escritura de los números y seguir realizando estas actividades con el apoyo escrito.

Las variables didácticas a considerar son las siguientes:

Tamaño del número: De diez en adelante.

Tamaño de la agrupación: Diez, cien, mil, etc.

Tipo de situación: De obtención del número de grupos (a partir del cardinal) o de obtención del cardinal (conocido el número de grupos.

[10] Se llama así a todos aquellos materiales organizados en torno a determinadas configuraciones. Por ejemplo, dedos de las manos, dados, cartas de la baraja, fichas de dominó, regletas Cuisenaire, regletas con tapa, piezas Herbiniere-Lebert, ábaco, dinero ficticio, etc.

Material utilizado: Todo tipo de objetos que se puedan contar, cubitos encajables, manos, cartas de la baraja, regletas Cuisenaire, ábaco, dinero ficticio; cajas, sobres, bolsitas para guardar objetos, etc.

Estimación del resultado: Con o sin exigencia previa de estimación del resultado.

Escritura del cardinal: Con o sin escritura del cardinal.

Situaciones de comunicación escrita de números de más de una cifra

Son situaciones similares a las de comunicación escrita de números de una cifra, la novedad es que se añade el tema del calendario. Para ello, cada comienzo de mes se colocara en la clase un cuadro con las casillas vacías correspondientes a los distintos días del mes. Se apuntarán las efemérides (cumpleaños de los niños, días de fiesta, etc.), contando las casillas desde el principio hasta llegar a la que interesa. Después, cada día se pondrá una pegatina con su fecha.

Las variables didácticas a tener en cuenta serían las siguientes:

Significado del número: Cardinal u ordinal.

Tamaño del número: De 10 en adelante.

Tipo de situación: De petición, recuerdo o calendario.

Tipo de codificación: Lectura (pasar del escrito al oral), escritura (pasar del oral al escrito) o las dos.

Material utilizado: Todo tipo de objetos que se puedan contar, regletas Cuisenaire, ábaco, dinero ficticio, papel y lápiz, cuadro en el que aparezcan escritos los cien primeros números en orden (cuadro numérico), cajas o sobres para guardar objetos, etc.

Un apoyo importante para escribir números de dos cifras es la representación de esos mismos números en el ábaco. Esto permite al profesor corregir con rapidez los errores de inversión del orden de las cifras. Ante un niño que escribe el treinta y cinco como 53, es relativamente rápido pedirle que represente el número en el ábaco y decirle que ponga primero el número de decenas y después el de unidades. En el caso de las centenas se pueden utilizar varios ábacos o billetes que imitan dinero.

Ejercicios:

11. Preparar una secuencia de tareas para alumnos de 1er curso en las que se incluyan una muestra de valores de las variables didácticas identificadas en el estudio de la lectura y escritura de números.

12. Analizar en un libro de texto de primaria si se incluyen o no, tareas o actividades de lectura y escritura de números y los valores de las variables didácticas tenidas en cuenta.

3.7. Materiales para el estudio de la numeración

Las actividades manipulativas con material concreto son esenciales para la comprensión del valor de posición de las cifras en el sistema de numeración. El uso de materiales concretos en sus diversas modalidades es una variable de las situaciones que hemos indicado en las secciones anteriores. Aquí describimos algunos de los materiales más frecuentemente utilizados.

En la figura 1.1 se muestran algunos ejemplos de materiales mediante los cuales se expresa el número 123. El interés de usar distintos materiales es para que el niño no asocie el valor posicional con un modelo particular.

Con el uso de materiales concretos diversos no se trata de que los alumnos abstraigan algo que tuvieran en común dichos modelos, como si los conceptos a construir tuvieran una naturaleza empírica. El fin esencial será lograr que la comprensión de las reglas del sistema de numeración posicional decimal sea independiente de los modelos físicos utilizables. Estos modelos pueden ser proporcionales o no proporcionales:

- En los proporcionales de base 10, como los bloques multibase, haces de palillos, etc., el material que expresa la decena es diez veces mayor en tamaño que el que expresa la unidad; la representación de la centena es diez veces mayor que la decena, etc. Los instrumentos de medida también pueden usarse como modelos proporcionales de la numeración: las bandas o cintas de metros, decímetros y centímetros se pueden usar como modelos de cualquier número de tres cifras.
- Los modelos no proporcionales, tales como el dinero, el ábaco, etc. no mantienen ninguna relación de tamaño entre las distintas piezas que representan los números. Por ejemplo, una moneda de 1 euro no es cien veces mayor en tamaño que la que representa un céntimo.

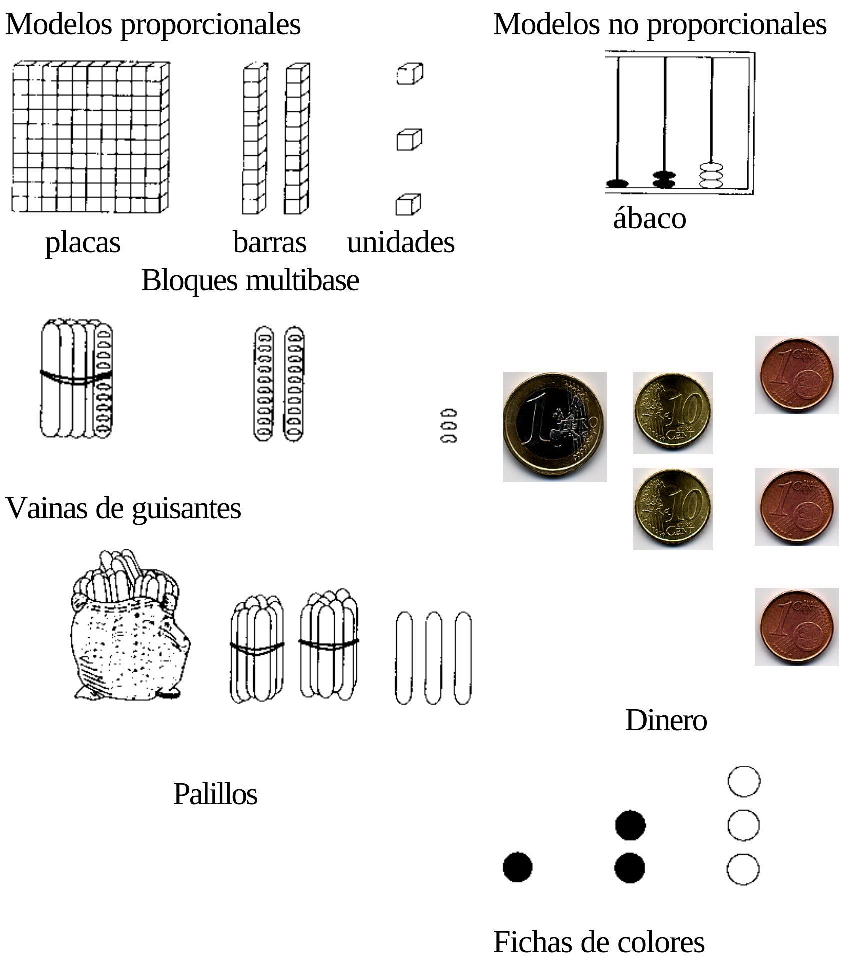
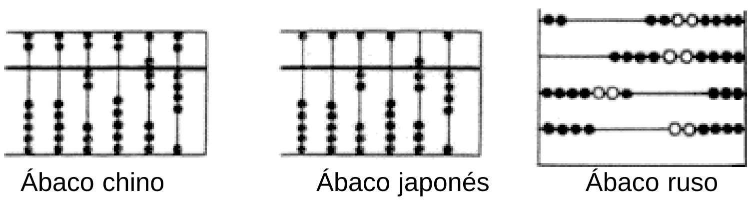


Figura 1.1: Expresión del número123

Entre los materiales manipulativos más utilizados en el estudio de la numeración y las operaciones aritméticas están los ábacos, los bloques multibase y los números en color.

Ábacos

Son juegos de varillas insertadas en un bastidor sobre las que se deslizan bolas o fichas como en un collar. Reproducen físicamente las características de los sistemas de numeración posicionales ordenados ya que las bolas representan un valor numérico diferente según la posición de la varilla en están colocadas.



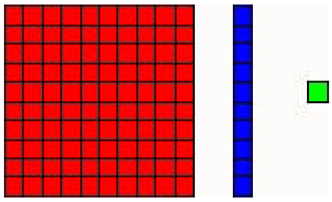
En el ábaco decimal cada bola representa una unidad, pero bolas situadas en varillas diferentes representan unidades de distintos órdenes; sobre cada varilla se tiene una potencia de la base. En cada varilla habrá 9 bolas como máximo ya que al añadir otra más se sustituyen por una bola colocada en la varilla de la izquierda.

Ábacos no proporcionales. Antes de utilizar los ábacos no proporcionales se recomienda usar variantes en los cuales no se usa el convenio del valor de posición, de modo que, por ejemplo, el número 23 queda expresado con dos hileras de 10 bolas y otra de tres. En cada hilera, que se coloca horizontalmente, que ponen 10 bolas, 5 de un color y 5 de otro.

Bloques multibase

Los bloques multibase se presentan en cajas, una para cada base de numeración. En cada caja existen piezas (generalmente de madera o material plástico) de cuatro tipos: cubos, barras, placas y bloques. Los cubos representan las unidades simples o de primer orden, las barras las unidades de segundo orden, las placas las de tercero y los bloques las de cuarto orden.

Forman un sistema de numeración por agrupamiento múltiple. Cada pieza corresponde a una potencia de la base. La representación de un número se corresponde con el tamaño de la cantidad ya que van arrastrando todas las unidades.Palillos, cordones, o cualquier otro material cotidiano, enlazados o distribuidos en cajas, haciendo grupos de diez unidades, reproducen las características de los bloques.

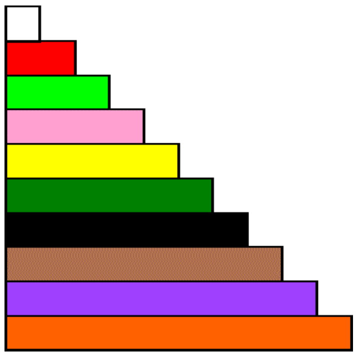


Bloque multibase de base 10

Números en color

Los números en color, también llamados regletas de Cuisenaire, son una colección de varillas coloreadas de longitudes que van desde 1cm (unidades) a 10 cm (decenas) que permiten reproducir las características de los sistemas de numeración de agrupamiento simple. Las varillas tienen forma de prisma cuadrangular de un centímetro cuadrado de sección y sus longitudes varían de centímetro en centímetro desde uno hasta diez.

Las regletas que tienen el mismo color tienen también la misma longitud. Los distintos tamaños permiten ordenar las regletas, formando escaleras; uniéndolas por los extremos se pueden obtener distintas longitudes que representarán números diferentes y las operaciones aritméticas.



Regletas de Cuisenaire

3.8. Recursos en Internet

Vamos a contar:

http://math.rice.edu/~lanius/counting/spcount.html

Descripción:

Este conjunto de lecciones animadas para niños de preescolar o primer curso de primaria sobre los números se presenta también en castellano. Incluye orientaciones para los maestros. Es parte de un conjunto de recursos más amplio para el aula de matemáticas. Los principales objetivos son:

– Contar un pequeño número de objetos
– Comprender el significado cardinal y ordinal de los números al cuantificar e identificar el orden de objetos
– Conectar números y palabras con las cantidades que representan
– Desarrollar la comprensión del tamaño relativo de los números y hacer conexiones entre el cardinal y orden dentro de una secuencia.
– Adquirir diferentes significados para la adición y substracción de números naturales y relacionar estas dos operaciones.

Ejercicio 15*:*

1. Explorar las diferentes opciones del programa.
2. Indicar los niveles y partes del currículo de primaria en que se pueden usar las distintas opciones.
3. Identificar las variables didácticas de las diversas tareas propuestas en el programa y los valores particulares implementados de dichas variables. ¿Existe algún tipo de control de los valores por parte del usuario?
4. Comparar los tipos de actividades que se pueden realizar usando el programa respecto a las que se hacen habitualmente con papel y lápiz.
   - ¿Se pueden hacer actividades que no se puedan realizar sin este recurso?
   - ¿Cómo cambian las técnicas de solución?
5. Después que los alumnos han explorado el programa y realizado las actividades, ¿Qué tipo de explicaciones podría dar el profesor para sistematizar los conocimientos puestos en juego?

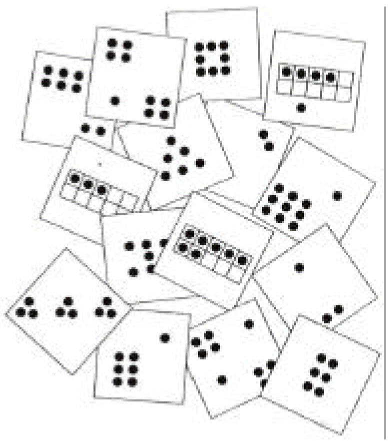
4. TALLER DE DIDÁCTICA

4.1. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 1er ciclo de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizaste personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

1. Busca ejemplos y ejercicios relacionados con las ideas de número y numeración.
2. Identifica aspectos del desarrollo del tema en los manuales escolares que consideres potencialmente conflictivos.
3. Describe los cambios que introducirías en el diseño las lecciones propuestas para los cursos 1º y 2º de primaria.

4.2. Diseño de actividades[11]



1. Actividades basadas en configuraciones puntuales
La figura adjunta muestra una colección de tarjetas en las cuales hay representadas distintas cantidades de puntos dispuestos según diversos patrones.
Propón una colección de tareas que permitan pensar a los alumnos sobre los números y sus composiciones.

2. La tabla 100

A continuación se muestra una disposición de los números del 0 al 99 que se conoce como la "tabla 100"; una variante puede ser comenzar

[11] Van de Walle (2001)

desde 1. Plantea actividades útiles para el aprendizaje de la serie numérica, ligadas al descubrimiento de patrones o regularidades en la disposición de los números.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

4.3. Análisis didáctico de tareas escolares[12]

Numeración

En una clase de primaria, antes de comenzar el primer período de trabajo sobre estudio de los números, particularmente de los números de tres cifras, el maestro procede a realizar la evaluación inicial incluida en el Anexo.

a) ¿Cuál es la función de una evaluación de este tipo y qué consecuencias tiene respecto a la organización de la clase?
b) Indicar para cada ejercicio qué competencias del alumno se propone verificar el maestro.
c) Para los alumnos que no han tenido éxito en el ejercicio nº 4, ¿qué material de ayuda propondrías? (describe el material)

<u>Anexo:</u> Conocimientos sobre numeración

1.¿Cuántos puntos hay marcados en este cuadro?

```
*     *     *        * *          *
     *   *      *    *     *          *   *

*  *      * *  *       **        *   *    *     * *
  *    *          *       *      *      *     * *


*   *   *   *       *       *      *    * *
         *           *       *      * *
  *          *      *    *  *       *       * *
    *     *      *      *      * *      * *  *

            *              *      *     *
           *    *             *           *
```

---

[12] Brousseau y cols (1995)

<table>
<tr><td>2. Observa y comple:
226 227 228
.... 345 .....
.... 603 .....
.... 230 .....
.... 139 .....
.... 200 .....
.... 99 .....
.... 501 .....
....</td><td>3. El maestro dicta los números:

246 - 120 - 500 - 63 - 275 895 - 709 - 314</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Escribe estos números ordenados de menor a mayor,

326 - 157 - 609 - 98 - 328 - 700 240 - 620</td></tr>
<tr><td>5. Observa los ejemplos y completa:

En 387, la cifra de las decenas es ____
En 246, la cifra de las centenas es ___
En 253, la cifra de las unidades es ___</td><td>

En 387, la cifra de las decenas es ____
En 246, el número de centenas es ___
En 253, el número de unidades es ___</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Observa y continúa:

160 - 162 - 164 - - - -

275 - 280 - 285 - - - -

90 - 92 - 94 - - - -

360 - 370 - 380 - - - -</td></tr>
</table>

4.4. Diagnóstico de la comprensión de la numeración decimal[13]

Utilizar las siguientes tareas con una pequeña muestra de alumnos de primer curso para evaluar su comprensión y competencia en el numeración decimal.

Destrezas de recuento

Actividad 1. Contar hacia adelante, a partir de 77.
Actividad 2. Contar hacia atrás, a partir de 55.
Actividad 3. Contar de diez en diez.
Actividad 4. Contar por decenas, comenzando en 34.
Actividad 5. Contar hacia atrás por decenas, comenzando en 130.

[13] Reys et. al. (2001), p. 168.

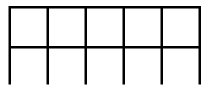
Actividad 6. Escribir el número 342. Pedir al niño que lea ese número. A continuación que escriba,

- el número siguiente a 342;
- el número que resulta de añadirle 10 unidades más;
- el número anterior;
- el número que resulta de quitarle 10 unidades.

Correspondencia entre dígitos y cardinales

Actividad 7. Mostrar al niño una colección de 36 fichas (o cualquier otro material). Pedir que cuente la cantidad de fichas y que escriba el número resultante. Señalar el 6 en el 36 y preguntar, "¿Qué quiere decir este 6 en relación a la cantidad de piezas que hay? Después señale el 3 y repetir la pregunta.

Uso de las decenas



Actividad 8. Tomar 47 fichas y hacer que el niño las cuente. A continuación mostrar al niño 10 tarjetas con casilleros decimales marcados (figura adjunta). Preguntar: Si queremos poner estas fichas en los espacios de estas tarjetas, ¿cuántas tarjetas podemos llenar?

Usar grupos de 10

Actividad 9. Preparar tarjetas con semillas u otras piezas pegadas en las tarjetas dispuestas en hileras de 10. Proporcionar al menos 10 tarjetas con una cantidad grande de semillas. Después de asegurarnos que el niño ha contado varias tarjetas de semillas y sabe que hay 10 en cada una de ellas, pedir que muestre 34 semillas. (¿Cuenta las semillas individualmente, o usa las tarjetas con decenas de semillas?). Esta actividad se puede hacer también con centenas.

BIBLIOGRAFÍA

Brissiaud, R. (1993). *El aprendizaje del cálculo*. Madrid: Visor.

Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995). *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*. Talence: Irem D'Aquitaine.

Castro, Enr, y Castro, E. (2001). Primeros conceptos numéricos. En Enr. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (p. 123-150). Madrid: Síntesis.

Castro, E., Rico, L. y Castro, Enr. (1987). *Números y operaciones*. Madrid: Síntesis.

Gómez, B. (1988). *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.

Ifrah, G. (1985).*Las cifras. Historia de una gran invención*. Madrid: Alianza Editorial, 1987.

Llinares, S. (2001). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En Enr. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (p. 151-176). Madrid: Síntesis.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos*. Madrid: Síntesis.

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., Smith, N. L. y Suydam, M. N. (2001). *Helping children learn mathematics* (Sixth edit.). New York: John Wiley.

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally* (4ª ed.). New York: Longman.

Varela, A. y cols (2000). *Matemáticas (1º y 2º Primaria)*. Madrid: Anaya.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y SU DIDÁCTICA PARA MAESTROS

Capítulo 2:

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE ADICIÓN Y SUBSTRACCIÓN EN PRIMARIA

Consigna:

A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

1) Resuelve los problemas propuestos.
2) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
3) Identifica diferencias y semejanzas entre los distintos problemas.
4) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
5) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
6) Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

1. Ahora suma tu:

	1	7
+	2	6
		3

	2	5
+	2	8

	1	6
+	3	4

	1	9
+	1	3

2. Forma parejas que sumen la cantidad indicada en la casilla coloreada

9	18	10
2	8	4
14	9	16

3. Coloca en vertical y resta: 87-52   86-16   99-41

4. Calcula "de cabeza":
   8+11   49+11   725+11   77-11   100-11   340-11   418-11
   2+8+5+5+7   6+2+4+5+3

5. Escribe los sumandos y resultados que faltan:
   76+48=48+....
   120+....= 80 +120
   28+25+35=28+.....=......

6. Juan tiene 11 caramelos. Cinco de ellos son de limón, los otros de fresa. ¿Cuántos tiene de fresa?

7. Juan tiene caramelos y le regala 3 a su hermana. Si le quedan 10, ¿cuántos caramelos tenía al principio?

8. En una carrera, Laura llegó la octava, 3 puestos antes que Beatriz. ¿En qué puesto llegó Beatriz?

9. Pedro gana 5 canicas por la mañana. Pierde 9 por la tarde. ¿Cuántas ha ganado o perdido en total?

10. Pedro tiene 6 caramelos más que Juan. A Juan le dan algunos más y ahora tiene un caramelo más que Pedro. ¿Cuántos caramelos le han dado a Juan ?

11. Patricia mide 15 cm. más que su hermano Pedro y 5 cm. menos que su hermano Juan. ¿Qué diferencia hay entre la altura de Pedro y Juan?

12. Para hacer un collar Miriam emplea 25 perlas rojas, 30 perlas azules y 45 perlas verdes. Calcula el número de perlas que tiene el collar.

13. Escribe con números y símbolos matemáticos: tres mil doscientos mas cuatro mil ochocientos es igual a cuatro mil ochocientos más tres mil doscientos.

14. Un tren sale de Robledo con 480 pasajeros. En Castillejo bajan 35 y suben 46. ¿Cuántos viajeros quedan ahora en el tren?

15. Calcula mentalmente estas sumas. Piensa primero en qué orden es más fácil hacerlas:

75+25+48	27+56+13	84+91+9
275+18+25	47+35+65	350+50+68

B: Conocimientos Matemáticos

1. ESTRUCTURA LÓGICA DE LAS SITUACIONES ADITIVAS DE UNA ETAPA

1.1. Situación introductoria

Resuelve los siguientes problemas poniendo al lado de cada uno de ellos una, dos o tres cruces según su grado de dificultad.

1. Juan tiene 11 caramelos. Cinco de ellos son de limón, los otros de fresa.¿Cuántos tiene de fresa?
2. Juan tiene caramelos y le regala 3 a su hermana. Si le quedan 10, ¿cuántos caramelos tenía al principio?
3. En una carrera, Laura llegó la octava, 3 puestos antes que Beatriz. ¿En qué puesto llegó Beatriz?
4. Pedro gana 5 canicas por la mañana. Pierde 9 por la tarde. ¿Cuántas ha ganado o perdido en total?
5. Pedro tiene 6 caramelos más que Juan. A Juan le dan algunos más y ahora tiene un caramelo más que Pedro. ¿Cuántos caramelos le han dado a Juan?
6. Patricia mide 15 cm. más que su hermano Pedro y 5 cm. menos que su hermano Juan. ¿Qué diferencia hay entre la altura de Pedro y Juan?.

1.2. Situaciones que dan sentido a las operaciones de suma y resta de números naturales

Las operaciones aritméticas de suma y resta se construyen inicialmente como un medio de evitar los recuentos o procesos de medida en situaciones parcialmente cuantificadas. Si, por ejemplo, hemos contado 20 objetos por un lado y 35 por otro y nos preguntan que cuántos hay en total, podemos decir que hay 55 objetos en total, sin necesidad de efectuar ningún nuevo recuento, gracias a que "sabemos sumar"; y si nos preguntan qué diferencia hay entre las dos primeras colecciones de objetos, podemos decir que se diferencian en 15 objetos, sin necesidad de nuevos recuentos, gracias a que "sabemos restar" .

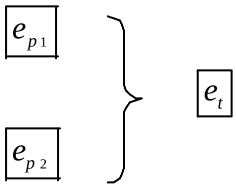
Las situaciones que dan sentido a la suma y a la resta de números naturales (situaciones aditivas de una sola operación) se clasifican atendiendo al *papel que juegan los números* que intervienen en ella, que es *variable* y puede ser:

- *estado* cuando los números del problema son el cardinal de un conjunto, el ordinal de un elemento o la medida de una cantidad de magnitud;
- *transformación* cuando un número expresa la variación que ha sufrido un estado;
- *comparación* cuando el número indica la diferencia que existe entre dos estados que se comparan entre sí.

Dependiendo de cuáles de estos papeles juegan los tres números que intervienen una situaciones aditivas de una sola operación, esto es, que se resuelven con una suma o una resta, obtenemos los siguientes tipos de situaciones:

Tipo 1: Estado -Estado -Estado (EEE)

En esta situación, tenemos una cantidad e_t que se refiere a un todo y dos cantidades e_{p1} y e_{p2} o partes en que descompone ese todo, es decir, tenemos la partición de un todo en dos partes. Se trata de una situación parte-todo[1] en la que todos los números son estados. Se representa mediante el diagrama:

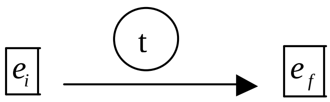


Ejemplos:

- Juan tiene 4 caramelos en la mano izquierda y 7 en la derecha. ¿Cuántos tiene en total?
- Juan tiene 11 caramelos. Cinco de ellos son de limón, los otros de fresa. ¿Cuántos tiene de fresa ?

Tipo 2: Estado -Transformación -Estado (ETE)

En esta situación tenemos una cantidad e_i que se refiere al estado inicial de un objeto o colección de objetos y una cantidad e_f que indica el estado final del objeto o de la colección. La cantidad t cuantifica la transformación sufrida por el objeto. La situación se representa mediante el diagrama:

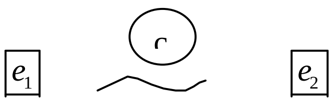


Ejemplos:

- Laura está la quinta en una cola para coger entradas para el circo. Deja que tres amigos pasen delante de ella. ¿Qué lugar ocupa ahora ?
- Juan tiene 7 caramelos. Regala 3 a su hermana. ¿Cuántos le quedan?

Tipo 3: *Estado -Comparación -Estado (ECE)*

Es una situación en la que se comparan dos estados e_1 y e_2. La cantidad c cuantifica la relación entre dichas cantidades. La situación se representa mediante el diagrama



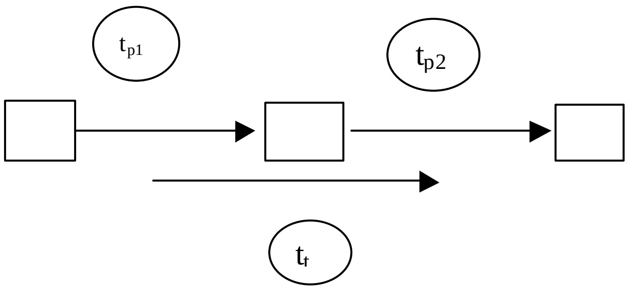
Ejemplos:

- Juan tiene 8 caramelos. Tiene 5 más que Pedro. ¿Cuántos tiene Pedro?
- Juan tiene 8 caramelos. Pedro tiene dos más. ¿Cuántos tiene Pedro?

[1] *Situaciones parte-todo*. Son aquellas en las que se tiene un todo o total descompuesto en dos partes. Se conocen dos de las cantidades y se quiere averiguar la tercera.

Tipo 4: *Transformación -Transformación -Transformación (TTT)*

Es una situación parte-todo en la que el objeto sufre una primera y después una segunda transformación. Las cantidades t_{p1} y t_{p2} se refieren a estas transformaciones y la cantidad t_t indica la transformación total. La situación se representa mediante el diagrama:

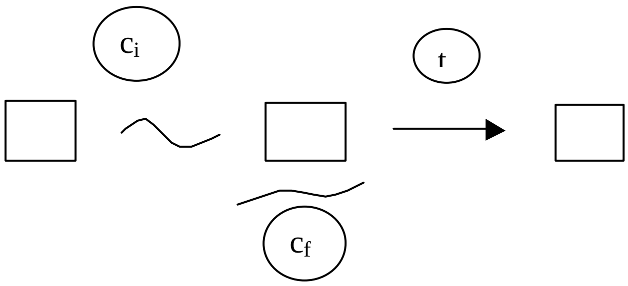


Ejemplos:

- Pedro gana 5 canicas por la mañana. Pierde 9 por la tarde. ¿Cuántas ha ganado o perdido en total?
- A María le dan 200 ptas. por la mañana. Le vuelven a dar 500 ptas. más por la tarde. ¿Cuánto dinero le han dado en total ?

Tipo 5: *Comparación -Transformación -Comparación (CTC)*

Situación en la que se establece una comparación inicial c_i entre dos cantidades, posteriormente una de las cantidades sufre una transformación t y, por último, c_f representa la comparación entre las cantidades finales. La situación se representa mediante el diagrama:

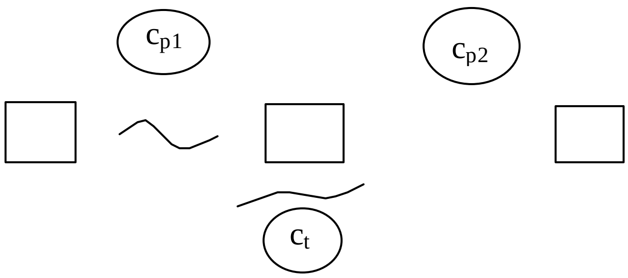


Ejemplos:

- Pedro tiene 6 caramelos más que Juan. A Juan le dan algunos más y ahora tiene un caramelo más que Pedro. ¿Cuántos caramelos le han dado a Juan?
- Pedro tiene 5 caramelos menos que Juan. A Juan le dan dos. ¿Quién tiene ahora menos caramelos? ¿ Cuántos menos?

Tipo 6: *Comparación -Comparación -Comparación (CCC)*

Situación parte-todo en la que c_{p1} expresa la comparación entre una primera y una segunda cantidad, c_{p2} indica la comparación entre la segunda y una tercera cantidad y c_t establece la comparación entre la primera y la tercera cantidad. La situación se representa mediante el diagrama



Ejemplos:

- Pedro tiene 8 caramelos más que María. María tiene 3 más que Juan. ¿Quién tiene más, Pedro o Juan? ¿Cuántos más?
- Pedro tiene 8 caramelos más que María. María tiene 5 menos que Juan. ¿Quién tiene más, Pedro o Juan? ¿Cuántos más?

En los seis tipos de situaciones nos encontramos con dos datos (cantidades conocidas) y una incógnita (cantidad desconocida que hay que encontrar a partir de los datos). Ahora bien, un simple examen de los ejemplos propuestos nos hace ver que dentro de cada tipo existe un gran abanico de situaciones posibles con diferencias sustanciales. Esas diferencias se deben a los distintos valores que pueden tomar las variables de las que hablamos a continuación. Además, el que la incógnita se obtenga mediante una suma o una resta de los datos depende de la posición que ocupa dentro de la situación y del sentido de las transformaciones o comparaciones que intervienen.

Por ejemplo, en los problemas de tipo 2 (estado - transformación - estado) obtenemos seis subtipos de problemas al considerar como dato o incógnita cada una de las tres cantidades que intervienen y si la cantidad inicial crece o disminuye, como se indica en la tabla siguiente:

	e_i	t	e_f	Crece	Decrece
Caso 1	Dato	Dato	Incógnita	*	
Caso 2	D	D	I		*
Caso 3	D	I	D	*	
Caso 4	D	I	D		*
Caso 5	I	D	D	*	
Caso 6	I	D	D		*

Las variables que intervienen en las situaciones aditivas son las siguientes:

- *Significado de los números:* que pueden ser cardinales, ordinales o medidas.
- *Papel de los números en la situación:* pueden ser estados, transformaciones o comparaciones.
- *Posición de la incógnita:* la incógnita puede ser el total o una de sus partes (en las situaciones parte-todo) o bien, el término inicial, medio o final (en las demás situaciones).
- *Sentido del término medio* (*situaciones II, III y V):* puede indicar un aumento o una disminución del término inicial (si se trata de una transformación) o bien, puede indicar que el término inicial es mayor igual o menor que el término final (si es una comparación).

Ejercicios

1. Resolver oralmente e indicar el tipo de cada uno de los siguientes problemas según la clasificación de acuerdo con la estructura lógica y semántica de los problemas aditivos.

a) *Pedro* tiene 37 bolas, juega una partida y pierde 18 bolas, ¿cuántas bolas tiene después de la partida?
b) *Bernardo* juega una partida de bolas y pierde 17 bolas; después de la partida tiene 21 bolas. ¿Cuántas bolas tenía antes de jugar la partida?
c) *Claudio* tiene 19 bolas y juega una partida. Después de la partida tiene 35 bolas. ¿Qué ha pasado en la partida jugada?
d) *Pablo* juega dos partidas; en la primera gana 37 bolas y en la segunda pierde 18. ¿Cuántas bolas tiene al final?

e) *Bruno* juega dos partidas de bolas, una después de otra. En la segunda pierde 17 bolas. Al final de las dos partidas ha ganado 21 bolas. ¿Qué ocurrió en la primera partida?
f) *Carlos* juega dos partidas de bolas. En la primera partida gana 19 bolas. Juega una segunda partida. Después de estas dos partidas,ganó en total 35 bolas. ¿Qué ha pasado en segunda partida?

2. FORMALIZACIÓN DE LA OPERACIÓN DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS NATURALES

2.1. La adición de números naturales

En las situaciones y problemas anteriores hemos introducido la adición y substracción en el conjunto de los números naturales. Puesto que siempre que sumamos dos números naturales obtenemos otro número natural, decimos que la suma es una *operación* en el conjunto de los números naturales. La substracción no es una operación en el conjunto de números naturales, pero si en el de los números enteros (que incluye los números negativos).

Estas operaciones se pueden dotar de diversos significados a partir de los cuales los niños pueden comprender sus propiedades básicas, lo que los preparará para el aprendizaje y la comprensión de los algoritmos de cálculo. También se han formalizado desde el punto de vista matemático. A continuación introducimos diversas formalizaciones de estas operaciones conectándolas cuando sea posible con las situaciones concretas en que se apoyan.

Definición recursiva de adición (basada en los axiomas de Peano)

Esta manera de definir la suma corresponde a uno de los aspectos del aprendizaje de la noción de adición por los niños: "el seguir contando". En la práctica se puede decir que "Sumar es seguir contando", mientras que restar consiste en "contar hacia atrás" (descontar).

Al estudiar los números naturales vimos como se podían definir estos números a partir de los axiomas dados por Peano. A partir de ellos es posible definir la adición en forma recursiva, partiendo de un número p cualquiera y de su siguiente sig(p). Esta es la definición:

- $p+0 = p$ para todo número natural p.
- $p + sig(n) = sig(p+n)$, para todo n diferente de cero.

En consecuencia, procedemos como sigue:

- Para sumar 1 a un número p se toma el sucesor del número p: $sig(p) = p+1$
- Para sumar 2 se toma el sucesor del sucesor, etc.
- Se supone que se sabe sumar n al número p y para sumar (n+1) se toma el sucesor de n+p, o sea, $p + (n+1) = sig(p+n) = (p+n) +1$.

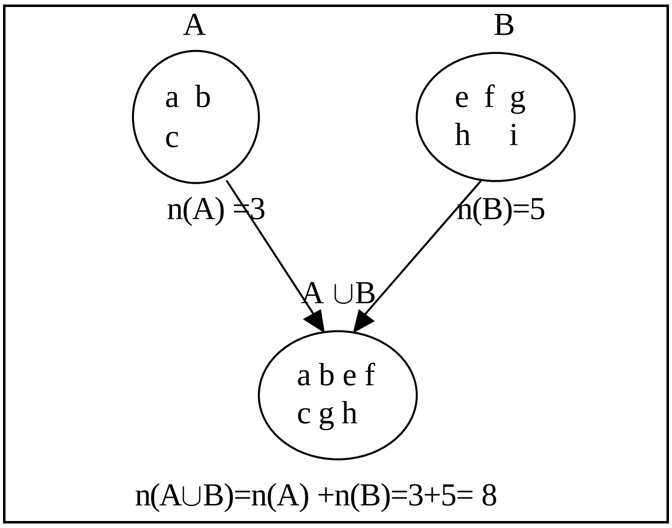
Podemos comprobar cómo con esta definición encontramos la suma de dos números cualquiera. Por ejemplo:

$$4+3 = 4+ sig(2) = sig(4+2) = sig (4+sig (1)) = sig(sig (4+1)) = sig (sig (4+sig (0)) =$$
$$= sig (sig (sig (4+0))) = sig(sig (sig (4))) = sig(sig(5)) = sig(6) = 7.$$

Es decir, 4 + 3 es el número que obtienes al empezar a contar desde cuatro y hallar los tres números siguientes.

Definición conjuntista:

En el modelo de conjuntos partimos de la idea de cardinal, que responde a la pregunta básica: ¿cuántos hay? La adición se interpreta como el cardinal obtenido al unir dos conjuntos, como mostramos en el siguiente esquema:



Definición: Dados dos números naturales a, b, se llama suma a+b al cardinal del conjunto $A\cup B$, siendo A y B dos conjuntos disjuntos cuyo cardinal es a y b, respectivamente.

Esta definición pone en juego dos operaciones bien distintas:

Por una parte la operación que se hace sobre los conjuntos (se reunen dos colecciones que no tienen ningún elemento en común para formar una nueva colección con la totalidad de los elementos que pertenecen a cada uno de ellos.

Por otra parte la operación que resulta al nivel de los números de elementos (cardinales) que contienen, operación que es la adición de dichos cardinales.

Propiedades:

- Clausura: La suma de dos números naturales es otro número natural.
- Asociativa: (a+b)+c = a+(b+c)
- Commutativa: a+b = b+a
- Existencia de elemento neutro: el natural 0; a+0=0+a = a, $\forall$ a $\in$ N

Al tener la propiedad de clausura, la adición es una ley de composición interna en N. Esto quiere decir que a cada par de números naturales se le hace corresponder otro número natural, que suele llamarse la suma de ambos números.

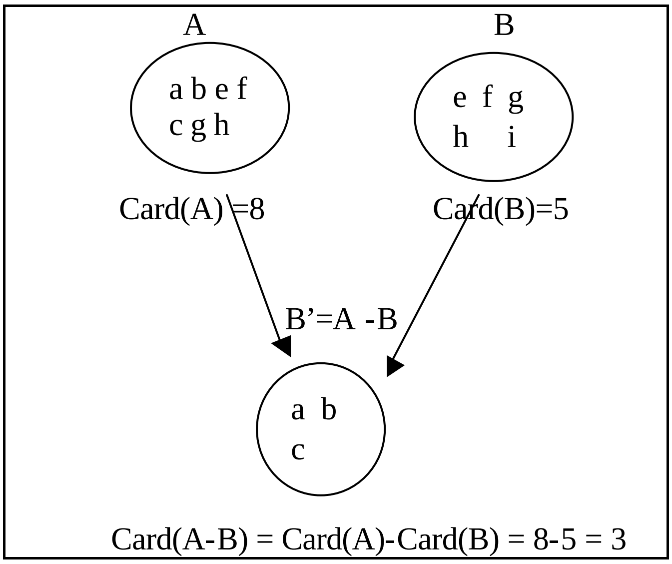
También se usa el término *operación,* que se define de una manera menos estricta y más general que la noción de ley de composición interna. Designa a cualquier procedimiento que da lugar a algoritmos de cálculo. Se habla frecuentemente de las cuatro operaciones en N: la adición, la sustracción, la multplicación y la división entera.

2.2. La sustracción de números naturales

Todas las operaciones de N no son leyes de composición interna en N: por ejemplo, la diferencia (3-5) no es un resultado en N: se dice que su cálculo es imposible, por lo que la sustracción no es una operación interna en N. Igual ocurre con la división entera, la cual a un par de números naturales hace corresponder un par de números bajo la forma de un cociente y un resto. A continuación presentamos algunos modelos y formalizaciones de la substracción.

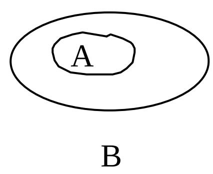
Definición conjuntista:

En el caso de la substracción y si el substraendo es menor que el minuendo, se puede representar mediante la operación conjuntista de complementación. En este caso tenemos un conjunto A con a elementos, un subconjunto propio B con b elementos y la diferencia entre a y b será el cardinal del complementario de A, es decir del conjunto A-B, como mostramos en el siguiente esquema:



Dados $b < a$, de modo que hay un subconjunto propio B de b elementos en un conjunto A de a elementos, entonces a-b = Card (B'), donde B' es el conjunto complementario de B respecto del conjunto A.

Ejemplo: Tengo 427 ovejas,vendo 123, ¿Cuántas me quedan?



Definición "sumando desconocido"

En esta definición se parte de la operación de adición. La adición es la operación inversa a la misma.

Si $a < b$, de modo que $a + \square = b$ tiene como solución un número natural, entonces b-a es el "sumando desconocido" en esa ecuación: $a + \square = b$.

Ejemplo: Hoy es 17, mi cumpleaños es el el dia 25, ¿cuántos días faltan?

Definición por comparación:

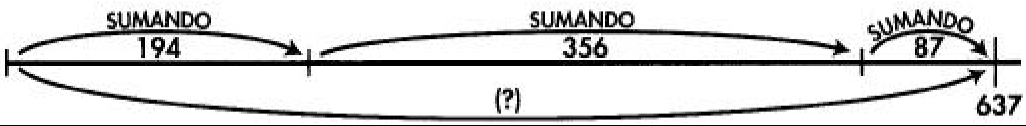
En esta definición se nuevo se parte de la idea de conjunto, pero no se requiere que uno de los conjuntos con los que se opera sea subconjunto propio del otro, basta con que pueda establecerse una correspondencia del primero con un subconjunto del segundo:

Dados $a < b$, de modo que un conjunto A con a elementos se puede poner en correspondencia biyectiva con un subconjunto propio A_1 de un conjunto B con b elementos, entonces b-a = Card(A'_1)

Ejemplo: En una reunión hay 87 chicos y 54 chicas. ¿Cuántos chicos hay más que chicas?

Definiciones de la suma y diferencia basadas en desplazamientos en la recta numérica

En este modelo los números naturales se interpretan geométricamente como distancias y la suma puede interpretarse como la distancia total cuando se combinan dos tramos consecutivos. Este modelo se encuentra con frecuencia en los libros de texto de Primaria, como en el ejemplo que reproducimos a continuación:



Tambièn podemos utilizar este modelo para la substracción, si a partir del primer término, en lugar de avanzar en la recta numérica se retrocede.

Dados $a < b$, para calcular la diferencia b-a se representa el número b sobre la recta numérica y se desplaza dicha posición hacia la izquierda a posiciones. La posición final alcanzada es el valor de b-a.

a veces

0 b-a __ __ __ .... __ b

Se puede decir que "restar es contar hacia atrás", o simplemente "descontar".

Propiedades de la sustracción en N

Las propiedades de la substracción no son las mismas que la de la adición, aunque los alumnos con frecuencia las confunden. A continuación analizamos estas propiedades.

- No es una ley de composición interna en N, ya que algunas “diferencias” como 2-5 no existen en N (a-b da un resultado negativo cuando $a<b$). Sin embargo, sí podemos decir que la sustracción es una operación en N ya que es un medio que permite calcular ciertas diferencias.

- No es commutativa, puesto que si a-b existe, b-a no existe en N, salvo si $a = b$, lo que sólo ocurre cuando a-b = b-a = 0. En una sustracción los dos términos de la diferencia no juegan el mismo papel: el primero, minuendo, es “pasivo” (sufre la sustracción); el segundo, sustraendo, es “activo”, es lo que se sustrae.
- No es asociativa, es decir que en un encadenamiento de dos sustracción, el orden en el cual se efectúa las sustracciones -siempre que sean posibles- influye en el resultado final.

Vemos que la sustracción no posee algunas propiedades “agradables” de la adición que proporcionan una gran libertad en los cálculos de las sumas. Sin embargo, tiene algunas propiedades que son útiles en el cálculo mental:

a) Cualesquiera que sean los naturales a, b, c, siempre que $a>b+c$ se tiene siempre que:
a-$(b+c) = (a$-$b)$-c.

Es decir que para restar una suma a un número, se puede restar sucesivamente al número cada término de esta suma. Ejemplo: 38-16 = (38 – 6) – 10 = 32-10=22.

b) Cualquiera que sean los naturales $a, b, c,$ si $a > b$ se cumple siempre:
$(a+c) – (b+c) = a$-b;
Y siempre que $a>b>c$, se tiene también: $(a$-$c) – (b$-$c) = a$-b.

Esto se puede enunciar diciendo que una difererencia no cambia si se suma, o bien se resta, un mismo número a cada uno de sus términos.

Esta propiedad es muy útil en el cálculo mental, sobre todo cuando el cálculo de la diferencia pone en juego "una llevada", ya que permite redondear el segundo término de la diferencia, lo que hace el cálculo más simple: Ejemplo: 35-18 = (35+2) –(18+2) = 37-20=17.

Esta propiedad interviene también en el algoritmo de cálculo en columnas de las diferencias.

3. TÉCNICAS DE CÁLCULO DE SUMAS Y RESTAS

3.1. Estrategias de obtención de sumas y restas básicas

En nuestro ámbito cultural aprendemos la tabla de sumar, y al preguntar "ocho más siete" o "nueve menos tres" respondemos de inmediato y de forma automática. Otras personas o los niños no tienen las respuestas totalmente memorizadas y recurren a estrategias intermedias para obtenerlas, como las siguientes:

- Permutar términos. Preguntan "seis más cinco" y contestamos "cinco más seis, once".
- Buscar los dobles. Preguntan "seis más siete" y pensamos "seis más seis, doce, más uno, trece" o "siete y siete, catorce, menos uno, trece".
- Completar a diez o cinco. Preguntan "ocho y seis" y pensamos "ocho y dos, diez, y cuatro, catorce"; o preguntan "trece menos siete" y pensamos "trece menos tres, diez, menos cuatro, seis"; o preguntan '"siete menos tres" y hacemos "siete menos dos, cinco, menos uno, cuatro".
- Sumar en vez de restar. Preguntan "trece menos seis" y pensamos "seis y siete, trece, siete" .

3.2. Técnicas orales (o mentales) de suma y resta

El cálculo mental, es decir, el que se hace sin herramientas tales como calculadoras o algoritmos escritos, se recomienda en las orientaciones curriculares y libros para profesores, por dos razones principales[2]:

La primera es que durante el período de la llamada "matemática moderna", se puso el acento en la justificación de los algoritmos, asimilando la construcción y comprensión de una noción matemática, y privilegiando el estudio del objeto matemático y sus propiedades, suponiendo que el resto de destrezas se adquiría por "añadidura". El cálculo mental, y los problemas de aplicación, se consideraban como vestigios de una pedagogía obsoleta.

En la actualidad se considera que en lugar de presentar directamente muchos conceptos y propiedades, pueden ser utilizados y experimentados por los niños, por medio de actividades tradicionalmente llamadas de "cálculo mental". De este modo, los diferentes pasos del algoritmo, y las propiedades de las operaciones, se pueden introducir e interpretar durante los ejercicios de cálculo mental. Suponemos también que las sesiones en clase no son para lucimiento de los alumnos dotados, sino se plantean discusiones, comparaciones, validaciones de los diferentes métodos ensayados por los niños, esto es, de reflexiones sobre las justificaciones de estos métodos. Por este motivo el calculo mental se suele llamar también cálculo reflexivo o razonado.

[2] Maurin y Johsua (1993, p.38-39)

La segunda razón, es que, lejos de entrar en competencia con la calculadora, el cálculo mental, asociado al aprendizaje de la estimación, es un auxiliar recomendado, para prever y anticipar un resultado numérico complejo, es el medio de control privilegiado de errores de tecleo en la calculadora.

El cálculo mental se puede poner en práctica:

- En las sesiones de control para verificar el conocimiento de las tablas, propiedades de las operaciones, 9 + 3 y 3 + 9; 0 x 8'7 + ? = 10; 10 - 7 = ?; ...
- Como puesta en funcionamiento y apoyo para la introducción de cálculos escritos más complejos, o para justificar y mostrar los mecanismos del algoritmo escrito;
- Como anticipación o verificación de un resultado, durante un cálculo automático;
- Finalmente, puede ser ocasión de uso en sesiones especiales de solución de "problemas abiertos", en el curso de las cuales se efectuará la puesta en común de las soluciones mediante la explicitación de los diferentes métodos realizados por los niños.

La existencia de dos sistemas de numeración, uno oral y otro escrito, que tienen características diferentes, da lugar a que las técnicas de cálculo asociadas a cada uno de ellos sean también distintas y deban ser estudiadas por separado.

Las técnicas orales se basan en la retención en memoria de los números que se operan, así como de los resultados de dichas operaciones. Las limitaciones de nuestra memoria exige técnicas basadas en números sencillos, que son más fáciles de recordar y operar. Por tanto, el objetivo de dichas técnicas es "redondear", es decir, conseguir números intermedios "redondos" que faciliten las operaciones y la retención en memoria. Son las siguientes:

- Permutar términos. Consiste en intercambiar el orden de sumandos o sustraendos[3]. Por ejemplo, en "veintitres más treinta y seis menos trece" decimos "veintitres menos trece, diez, diez más treinta y seis, cuarenta y seis".
- Suprimir o añadir ceros. Se prescinde de los ceros finales que se vuelven a añadir posteriormente. Por ejemplo, en "ciento cincuenta más ochenta" podemos decir "quince más ocho, veintitres, doscientos treinta".
- Descomponer términos. Se descompone uno o varios términos en sumandos o sustraendos. Por ejemplo, en "quinientos ochenta y cinco menos cuatrocientos veintitres" decimos "quinientos ochenta y cinco menos cuatrocientos, ciento ochenta y cinco, menos veinte, ciento sesenta y cinco, menos tres, ciento sesenta y dos". También en "ciento noventa y seis más veintisiete" podemos decir "veintisiete es veintitres más cuatro, ciento noventa y seis más cuatro, doscientos, doscientos veintitres".
- Compensar términos. En una suma, sumar a un sumando lo que se substrae a otro. En una resta, sumar o restar la misma cantidad a los dos términos. Por ejemplo, "treinta y ocho más cincuenta y cuatro es lo mismo que cuarenta más cincuenta y dos, noventa y dos". Otro ejemplo, "noventa y nueve menos cuarenta y seis, cien menos cuarenta y siete, cincuenta y tres".

Otras técnicas orales más particulares, como,

- las técnicas de sumar (o restar) 9: se suma (resta) una unidad a las decenas y se resta (suma) una unidad a las unidades;
- la de sumar (o restar) 11: se suma (resta) una unidad a las decenas y otra a las unidades, etc.

[3] A los términos de una suma se les llama sumandos. En una resta, al primer término se le llama minuendo y al segundo sustraendo.

3.3. Técnicas escritas de suma y resta

Las técnicas escritas o algoritmos de suma y resta se construyen a partir de nuestro sistema de numeración escrito. Un algoritmo es una sucesión de reglas a aplicar, en un determinado orden, a un número finito de datos para llegar con certeza en un número finito de etapas a cierto resultado. No exigen una toma de decisiones sino simplemente la puesta en marcha de un proceso que se compone de una sucesión de ordenes inequívocas. Las reglas que constituyen el algoritmo de la suma para dos o más sumandos son:

- Se escriben los sumandos uno debajo de otro de manera que las unidades de un mismo orden de los diferentes números queden situadas en la misma columna.
- Se traza una raya horizontal debajo del último sumando.
- Se suman las cifras que se encuentran en la columna de la derecha.
- Si el resultado de la suma es menor que 10 se escribe en dicha columna debajo de la raya y se pasa a sumar la columna siguiente.
- Si el resultado de la suma es mayor o igual que 10 se escriben las unidades en la columna y la cifra de las decenas se añade a la suma de la columna siguiente.
- Se continúa el procedimiento hasta llegar a la última columna. El resultado de sumar la última columna se escribe íntegro debajo de la raya.
- El número que aparece bajo la raya es la suma de dichos sumandos.

Ejercicio

2. Escribe la tabla de sumar en base cinco y utilízala para realizar la siguiente suma: $135_{(5} + 431_{(5}$. Justifica el algoritmo indicando las propiedades de la adición y las reglas del sistema de numeración usadas.

Las reglas que definen el algoritmo de la resta son:

- Se escribe el minuendo y debajo el sustraendo de manera que las unidades de un mismo orden de los dos números queden situadas en la misma columna.
- Se traza una raya horizontal debajo del sustraendo.
- En la columna de la derecha, si la cifra del minuendo es mayor o igual que la del sustraendo se restan y el resultado se escribe en dicha columna debajo de la raya y se pasa a restar las cifras de la columna siguiente.
- Si la cifra del minuendo es menor que la del sustraendo se le suman a la primera diez unidades, se efectúa la resta, se escribe el resultado en dicha columna debajo de la raya y se aumenta en una unidad la cifra del sustraendo situada en la columna siguiente. Se pasa a restar las cifras de la columna siguiente.
- Se continúa el procedimiento hasta llegar a la última columna.
- El número que aparece bajo la raya es la resta de los dos números dados.

Ejercicios

3. Realiza la siguiente operación y explica el procedimiento seguido utilizando dibujos que simbolicen los distintos agrupamientos (representaciones gráficas simulando el uso de los bloques multibase y el ábaco):

$641_{(8} – 227_{(8}$

4. Calcula la siguiente suma de números expresados en base 12, indicando las propiedades de la adición y las reglas del sistema de numeración usadas:

$9A57_{(12} + 38B4_{(12}$

5. Efectúa la siguiente sustracción de números naturales expresados en base 8, usando el algoritmo tradicional de "restar llevando", indicando las propiedades de la resta y del sistema de numeración correspondiente: $7452_{(8} - 6103_{(8}$

Estos algoritmos se complementan con una "cantinela" oral. En el caso de la suma de 457 y 895 decimos, por ejemplo: "siete y cinco, doce, llevo una, nueve y una, diez, y cinco, quince, llevo una, cuatro y una, cinco, y ocho, trece". Y en el caso de la resta 435- 277 decimos: "del siete al quince, ocho, llevo una (o bajo una), siete y una, ocho, del ocho al trece, cinco, llevo una, dos y una, tres, del tres al cuatro, una".

3.4. Justificación de las técnicas escritas de suma y resta

La justificación de los algoritmos escritos se basa en propiedades de la suma y resta de números naturales y del sistema de numeración escrito.

En el caso de la suma, la posibilidad de descomponer los números en unidades y la utilización conjunta de las propiedades asociativa y conmutativa, permite transformarla en sumas parciales de unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas, etc. Cuando en una de esas sumas parciales obtenemos un resultado de dos cifras quiere decir qur esa unidad se compone de diez o más elementos y, por tanto, según las reglas de nuestro sistema de numeración escrito, todo lo que supera la decena debe ser trasladado a la unidad superior siguiente, lo que justifica la técnica de la llevada.

En el caso de la resta, las propiedades que dicen que "restar una suma es lo mismo que restar cada uno de los sumandos" y que "sumar una cantidad y restar otra es equivalente a restar, en primer lugar, la segunda cantidad y sumar después la primera" son las que permiten descomponer la resta global en restas parciales de unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas, etc.

La justificación de la técnica de la llevada es aquí más compleja. Si en una columna nos encontramos con que la cifra del minuendo es menor que la del sustraendo esa resta parcial, en principio, no se puede efectuar. Para salvar el escollo podemos tomar una unidad de la cifra del minuendo situada en la columna inmediatamente siguiente (hacia la izquierda) y trasladarla a la columna que estamos intentando restar. En esta columna esa unidad de orden superior se transforma en diez unidades que se suman a las ya existentes en la cifra del minuendo y permiten efectuar la resta. Pero ahora, al pasar a la columna siguiente nos encontramos con que a la cifra del minuendo hay que restarle una unidad que ya hemos consumido en la resta parcial anterior. El hecho de que, en vez de restarle una unidad a la cifra del minuendo, se la sumemos a la cifra del sustraendo se basa en una propiedad de la resta que dice que "en una resta restar un determinado número al minuendo equivale a sumar ese mismo número al sustraendo" .

En cuanto a la parte oral de los algoritmos de suma y resta su justificación viene dada por la fluidez que producen en el desarrollo del algoritmo. En el algoritmo de la suma:

- facilita la obtención de los hechos numéricos básicos;
- ayuda a retener en memoria la llevada.

En el algoritmo de la resta:

- refuerza la estrategia de "sumar en vez de restar" a la hora de obtener los hechos numéricos básicos;
- permite modificar directamente el minuendo en función del tamaño del sustraendo;
- ayuda a retener en memoria la llevada.

Ejercicios

6. Justifica las operaciones siguientes, indicando qué propiedades se emplean: (20+2)+(30+8)= 20+(2+ (30+8))=20+ ((30+8)+2)=20+(30+(8+2))=20+30+10=60.

7. ¿Cuál de los siguientes conjuntos numéricos es cerrado para la adición? Si uno de ellos no es cerrado para la adición, indica el por qué.
{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, ...}
{1, 2, 3, 4, ...1000}
{0, 3, 6, 9, 12, 18,....}

3.5. Otras técnicas escritas de suma y resta: ejemplos

a) Algoritmo extendido de suma

Este algoritmo evita el problema de las llevadas, pero ocupa bastante más espacio en el papel y en sumas de más de dos sumandos o de números grandes puede resultar farragoso. No es de uso común, aunque algunas personas lo proponen como posible algoritmo de iniciación en la escuela.

$$\begin{array}{cccc} & 8 & 9 & 2 \\ & 5 & 3 & 9 \\ \hline & & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & \\ 1 & 3 & & \\ \hline 1 & 4 & 3 & 1 \end{array}$$

b) Algoritmo de suma o resta con llevada escrita

Se trata de los algoritmos estándares con la diferencia de que el apoyo oral para recordar la llevada es sustituido por un apoyo escrito: la llevada se escribe al comienzo de la columna siguiente, en el caso de la suma, o como un superíndice de la cifra del sustraendo a la que afecta, en el caso de la resta. La enseñanza de los algoritmos suele iniciarse con la llevada escrita acompañada de la cantinela para producir un doble refuerzo, oral y escrito. Posteriormente, el refuerzo escrito se abandona.

c) Algoritmo de resta sin llevadas

Sea la resta 4832- 457. Tomamos un número formado por tantos nueves como cifras tenga el minuendo y le restamos 457. Al resultado de dicha operación le sumamos 4832 y al número así obtenido, 14374, le quitamos la unidad de orden superior y se la añadimos a la cifra de las unidades, con lo que queda el número 4375, que es el resultado de la resta.

$$\begin{array}{ccccc} & 9 & 9 & 9 & 9 \\ & & 4 & 5 & 7 \\ \hline & 9 & 5 & 4 & 2 \\ & 4 & 8 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 4 & 3 & 7 & 4 \end{array}$$

Es un algoritmo muy poco usado pues, aunque tiene la ventaja de que no produce llevadas, alarga las operaciones y su justificación es compleja. Se basa en que a la resta 4832 -457 se le puede sumar y restar el número 9999 sin que el resultado de la resta se vea modificado.

Tendremos entonces: 4832- 457 = 9999 + 4832- 457- 9999 = 9999- 457 + 4832- 9999. Pero restar 9999 es lo mismo que restar 10000 y sumar 1 con lo que resulta: 4832- 457 = 9999- 457 + 4832- 10000 + 1 que es el procedimiento definido en el algoritmo.

d) Algoritmo de resta de "tomar prestado"

Aquí se hace actuar la llevada sobre el minuendo de manera que en vez de añadir una unidad al sustraendo se le resta al minuendo, lo que se expresa tachando la cifra del minuendo y escribiendo encima de ella una cifra que sea una unidad menor. Este algoritmo se enseña en muchos países. Tiene la ventaja de que su justificación es más sencilla que la del nuestro, pero a cambio deben estudiarse como casos especiales aquellos en los que alguna cifra del minuendo sea cero mientras que nuestro algoritmo no genera excepciones. Actualmente, en muchas escuelas españolas se empieza enseñando este algoritmo para pasar después al algoritmo tradicional.

$$\begin{array}{cccc} & 7 & 2 & \\ 4 & \cancel{8} & \cancel{3} & 2 \\ & 4 & 5 & 7 \\ \hline 4 & 3 & 7 & 5 \end{array}$$

Ejercicios

8. Efectúa las operaciones siguientes en las bases que se indican, empleando el algoritmo de llevada escrita:

a) $10111_{(2} + 1101_{(2}$
b) $11001_{(2} - 1011_{(2}$
c) $4253176_{(8} + 3247615_{(8}$
d) $2055_{(8} - 1267_{(8}$

9. Completar la suma y la resta “con huecos” siguientes:

a) $(3\square 5) + (\square 5\square) = 764$
b) $(\square\square 5) - (45\square) = 346$

10 ¿En qué base b se ha realizado la siguiente suma: $437_{(b} + 465_{(b} = 1013_{(b}$?

Ejercicios

11. Describir la estrategia seguida en los ejemplos siguientes:
a) 371 + 634 = 1000 +1+4
b) 615 -234: (615-200), 415, -34, (415-30), 385, -4, 381.
c) 73 - 27: 53 - 7, 56 - 10, 46

3.6. Uso de la calculadora en la solución de problemas aditivos[4]

Desarrollar las técnicas de cálculo escrito y mental es indispensable, pero el papel de las calculadoras de bolsillo simples no se debe descuidar en estos primeros niveles del aprendizaje matemático. Parece difícil evitar el encuentro con estas herramientas que han hecho su aparición en casi todos los hogares. En lugar de ver en ellas un enemigo de las técnicas de cálculo mental o escrito, sería preferible tratar de hacer de la calculadora un aliado que puede ser beneficioso.

En primer lugar, después de una fase de descubrimiento del teclado del aparato y de sus comandos, se toma conciencia de que el formalismo que se utiliza durantes los cálculos

[4] Maurin y Johsua (1993, p.41)

escritos es también una herramienta de comunicación con la máquina que no "comprende" sino escrituras correctas.

Mientras que el funcionamiento de la calculadora se domina al nivel de los cálculos de sumas, se puede convertir en una herramienta que permita al niño verificar la validez de un cálculo y de tener una autonomía mayor en su aprendizaje de las diferentes técnicas de cálculo. Contrariamente a lo que se podría pensar, esto no le quitará el compromiso de aprender a calcular. Además, se pueden organizar concursos en la clase sobre cálculos simples para mostrar que un alumno que domine bien el cálculo mental es capaz, en muchos casos, de calcular más deprisa que la máquina, que depende de la habilidad manual de su operario.

Por otra parte, durante la resolución de ciertos problemas, si el objetivo es trabajar sobre la relación entre la situación descrita por el enunciado y la elección de las operaciones a realizar, se podrá autorizar el uso de la calculadora para permitir a los alumnos consagrarse enteramente a su tarea de reflexión.

De igual modo, se pueden hacer ejercicios de investigación con ayuda de la calculadora, lo que puede favorecer el descubrimiento de ciertas relaciones entre los números al estar liberado del aspecto fastidioso de las largas series de cálculos y de tanteos que harían imposible el ejercicio, como ocurre en este caso:

- Encontrar tres enteros sucesivos cuya suma sea igual a 48.

Se pueden abordar algunas cuestiones sobre el orden de magnitud de un resultado, cuestión importante y delicada, que también se puede abordar bajo la forma de juego como el siguiente:

- Si sumo 19, 23 y 18, ¿se obtiene un resultado mayor que 50? Verificalo.

Problemas como los siguientes: 35 + ? = 73; o 35 + ? = 28 (sin solución en N), pueden también ser abordados y conducir, después de una fase de investigación suficiente y frecuentemente muy activa, a descubrimientos insospechados.

Cuestiones como la siguiente: “Teclear 7, a continuación, sin pulsar la tecla de borrar, hacer que aparezca en la pantalla 17 y explicar cómo se logra”, son también ejercicios excelentes sobre la numeración, que la herramienta transforma en sesión activa y dinámica para todos los alumnos.

Como conclusión podemos decir que la calculadora tiene de hecho su lugar desde los ciclos iniciales de primaria, bien como útil de auto-evaluación de ciertos cálculos, bien como herramienta que permite una reflexión a partir de los cálculos.

12. Empleando la función constante de la calculadora realiza las siguientes actividades

a) Cuenta de uno en uno, desde 0 hasta 50
b) Cuenta de 2 en 2 desde 0 hasta 80
c) Cuenta de 7 en 7 desde 0 a 91
d) Cuenta hacia atrás de 6 en 6 desde 60 hasta 0; anota el número 6 restado.
e) Cuenta hacia atrás de 3 en 3 desde 75 hasta 0; anota el número de 3 restado
f) Cuenta hacia atrás de uno en uno desde 25 hasta 0

13. a) Calcula 273 - 129 sin usar la tecla de restar; b)Calcula 273 + 129 sin usar la tecla de sumar

14. Calcular el valor exacto de la siguiente suma: 1234567890123456789 + 135714468012345678

15 . Calcula el valor exacto de la siguiente sustracción: 1357901234567890 - 1234567890246805

4. TALLER DE MATEMÁTICAS

1. Calcula las siguientes sumas:
   1 + 11 =
   1 + 11 + 111 =
   1 + 11 + 111 + 1111 =
   ¿Cuál es el patrón que siguen?
   ¿Cuántos sumandos tiene la expresión en la que falla el patrón por primera vez?

1. El modelo de conjuntos para la adición se puede visualizar con materiales manipulativos, o con configuraciones puntuales, tales como los números triangulares Tn:

```
T1=1   T2= 3   T3=6   T4= 10,...
 *        *       *        *
         **      **       **
                ***      ***
                        ****
```

   a) ¿Puedes escribir el número triangular T10?
   b) ¿Puedes encontrar una expresión general para el número triangular Tn?
   c) ¿Puedes mostrar que la suma de dos números triangulares consecutivos es un número cuadrado (es decir el cuadrado de un número natural)?

3. Te proponemos realizar la siguiente actividad:

a. Dibuja cuatro casillas poniendo en cada una un número natural
b. En las tres primeras casillas de la 2ª fila pon la diferencia de los dos números en las dos casillas encima de ella.
c. En la última casilla de cada fila pon la diferencia entre los números en la primera y última casilla de la fila anterior
d. Repite el proceso añadiendo más filas. Se acaba la actividad si consigues una fila con todos ceros.

3	18	7	100
15	11	93	97
4	82	4	82

- ¿Crees que siempre se acabará este juego?
- ¿Puedes encontrar 4 números para poner en la primera fila de modo que se acabe en un solo paso? ¿en ocho pasos?

4. Debajo te presentamos una tabla de sumar incompleta donde las filas y columnas se han permutado unas con otras. ¿Eres capaz de reconstruirla?

+	5				2				3
3									
				18					
			12						
		5			6				
0						0			
		8						14	
5									
					3				
8							16		

5. ¿Por qué si a un número cualquiera le restamos la suma de todas sus cifras se obtiene un múltiplo de 9? ¿Y si el número estuviese escrito en una base diferente de numeración, por ejemplo en base 5?

6. ¿Cómo podrías medir 1 litro de aceite si sólo tienes dos recipientes, uno de 7 litros y otro de cuatro?

7. Si se necesitan 600 cifras para numerar las páginas de un libro. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

8. Efectúa las siguientes operaciones en las bases que se indican:

$$\begin{array}{r}1223_{(4}\\3032_{(4}\\+\ 123_{(4}\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}\alpha 10\alpha 9_{(11}\\+7654_{(11}\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}7267_{(8}\\-\ 5671_{(8}\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}245608_{(12}\\-\ 196429_{(12}\\\hline\end{array}$$

9. Una persona efectúa la resta 482 -153 de esta manera 282 + 47 = 329. ¿Es un procedimiento correcto?

10. A continuación se realizan algunas operaciones utilizando técnicas orales. Indica en cada caso las técnicas utilizadas.

a) 1573- 628, mil quinientos setenta y tres menos seiscientos, novecientos setenta y tres, menos veinte, novecientos cincuenta y tres, novecientos cincuenta menos cinco, novecientos cuarenta y cinco.

b) 197 + 322 + 38, trescientos treinta y treinta, trescientos sesenta, más doscientos, quinientos sesenta, menos tres, quinientos cincuenta y siete.

11. En una suma de dos términos ¿entre qué valores puede variar la llevada? ¿Y en una suma de tres términos? ¿Yen una de cuatro? ¿Y en una resta? ¿Y en una multiplicación? ¿Y en una división?

12. Utiliza el algoritmo de resta sin llevadas para restar 17829 de 34234.

13. Resuelve los siguientes problemas de sumas y restas. Indica, en cada caso, los valores de las variables que intervienen en la situación y el tipo de situación. Cuando intervengan varias operaciones en un mismo enunciado estúdialas por separado.

a) Los padres de Julia tienen 93.645 pesetas para los gastos de la casa durante el mes. Al final de mes han gastado 81.436 pesetas. ¿Cuánto han ahorrado?

b) Pedro tiene 12 años y María 8. ¿Cuántos años se llevan?

c) Un niño compró 15 chicles, perdió 7 y le regalaron 4. ¿Cuántos chicles tiene ahora?

d) Ignacio tiene 50 cromos más que Fernanda, que, a su vez, tiene 20 cromos menos que Adela, la cual tiene 80 cromos. ¿Cuántos cromos tienen Ignacio y Fernanda?

e) Luisa tiene 20 canicas de cristal y Carmen 15 canicas de barro. Al juntar sus canicas con las de Alberto habría 60 canicas en total. ¿ Cuántas canicas tiene Alberto?

f) A un partido de baloncesto asisten 526 socios del club local y 2.513 espectadores no socios. ¿Cuántos espectadores en total presencian el partido?

g) Andrés mide 9 cm. más de alto que su hermano Julio y 5 cm. menos que su hermana Sofía. ¿Qué diferencia de altura hay entre Sofía y Julio?

h) Eva tiene 2.000 pesetas más que Gloria. Gloria se gasta 500 ptas. ¿Quién tiene ahora más dinero? ¿Cuánto más?

i) La distancia de mi casa a la de un amigo es de 459 m. Salgo de mi casa y recorro 197 m. de esa distancia. ¿Cuántos metros me faltan para llegar a la casa de mi amigo?

14. Encuentra un número capicúa de 5 cifras sabiendo que el resultado de restar a dicho número el que se obtiene suprimiendo la cifra central es 12400.

15. Para efectuar una resta $a - b$ se puede seguir el siguiente procedimiento: se escribe un número que tenga tantos nueves como cifras tenga el minuendo a, a ese número se le resta el sustraendo b y, posteriormente, al resultado se le suma el minuendo a; al resultado así obtenido se le suprime la cifra situada más a la izquierda, que será un 1, y esa cifra se le suma a las unidades. El número así obtenido resulta ser la diferencia a-b. Justifica por qué.

16. Resuelve los problemas que se enuncian a continuación utilizando métodos aritméticos.

a) Un padre de tres hijos dejó en herencia 1600 coronas. El testamento precisaba que el primogénito debía recibir 200 coronas más que el segundo, y el segundo 100 coronas más que el último. ¿Qué cantidad recibió cada uno de los hijos?

b) En una caja hay el doble de monedas que en otra. Si se pasan 7 monedas de la primera a la segunda caja, quedan en ambas el mismo número de monedas. ¿Cuántas monedas tenía al principio cada caja?

c) Un hombre debe llevar un mensaje a través del desierto. Cruzar el desierto lleva nueve días. Un hombre puede llevar únicamente alimento para 12 días. No hay alimento en el lugar donde debe dejarse el mensaje. Se dispone de dos hombres. ¿Puede llevarse el mensaje y volver sin que falte alimento?

d) Un aeroplano recorrió 1940 km el primer día, el segundo recorrió 340 km más que el primero y el tercero 890 km menos que entre los dos anteriores. ¿Cuántos kilómetros recorrió el aeroplano en total?

C: Conocimientos Didácticos

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

El dominio de los "hechos numéricos básicos" (las tablas de las operaciones aritméticas) implica que los niños puedan dar una respuesta rápida sin recurrir a medios no eficientes, como el recuento. Este aprendizaje, para el caso de la suma y la resta comienza desde el primer nivel, pero debe continuar en segundo curso y requiere, de parte del maestro:

- Ayudar a los alumnos a desarrollar una sólida comprensión de las operaciones y de las relaciones entre los números.
- Desarrollar técnicas eficientes de recuerdo de los hechos numéricos.
- Proporcionar práctica suficiente en el uso y selección de dichas técnicas.

El profesor deberá ser capaz de ayudar a los niños a conectar los diversos significados, interpretaciones y relaciones de las operaciones aritméticas (adición, sustracción), de manera que puedan usarlas de manera eficiente en los contextos de la vida real. Los problemas verbales y los modelos gráficos o tangibles (conjuntos de fichas y la recta numérica) son las dos herramientas básicas que tiene el maestro para ayudar a los niños a desarrollar el significado de las operaciones. Los problemas verbales proporcionan una oportunidad de examinar los diversos sentidos de cada operación. Su uso en la clase debe hacerse en un ambiente de indagación, permitiendo a los niños usar sus propias técnicas y justificar sus soluciones.

En la actualidad la disponibilidad de calculadoras y ordenadores nos libera de la realización de cálculos penosos, pero al mismo tiempo lleva a conceder más importancia al desarrollo del sentido de la pertinencia y racionalidad de los resultados. Por ello la enseñanza de diversas estrategias de cálculo mental y de estimación figura como un objetivo en los diversos currículos de matemáticas básicas. El estudio de los algoritmos tradicionales de cálculos de las operaciones aritméticas, no debe ser un obstáculo para que los alumnos desarrollen sus propias estrategias. La enseñanza se debe apoyar en las estrategias inventadas por los propios alumnos por las siguientes razones:

- Favorecen la comprensión del sistema de numeración decimal.
- Se basan en la comprensión de los estudiantes.
- Los alumnos comenten menos errores cuando usan sus propias estrategias.
- Promueven el pensamiento matemático, ya que son un ejemplo del "hacer matemáticas"

1.1. Diseño Curricular Base del MEC

El Decreto del MEC (BOE 26-6-91) por el que se establecen las enseñanzas mínimas del área de matemáticas en la educación primaria establece las siguientes indicaciones para el bloque temático de "Números y operaciones":

Conceptos:

1. Las operaciones de suma, resta y sus algoritmos.
2. Reglas de uso de la calculadora

Procedimientos

1. Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en la resolución de problemas numéricos u operatorios.

2. Estimación del resultado de un cálculo y valoración de si una determinada respuestas numérica es o no razonable.
3. Elaboración de estrategias personales de cálculo mental con números sencillos.
4. Utilización de la calculadora de cuatro operaciones y decisión sobre la conveniencia o no de usarla atendiendo a la complejidad de los cálculos y a la exigencia de exactitud de los resultados.

Actitudes

1. Confianza en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo mental.
2. Gusto por la presentación ordenada y clara de los cálculos y de sus resultados.

Estas orientaciones curriculares se desarrollan en el DCB (Documento Curricular Base, MEC, 1989), donde se indica que, al finalizar la Educación Primaria, los alumnos habrán desarrollado la capacidad de:

1. Identificar en su vida cotidiana situaciones y problemas para cuyo tratamiento se requieren operaciones elementales de cálculo (suma, resta), discriminando la pertinencia de las mismas y utilizando los algoritmos correspondientes.
2. Utilizar instrumentos de cálculo (calculadora, ábaco, ...) y medida (regla, compás, etc.) decidiendo, en cada caso, sobre la posible pertinencia y ventajas que implica su uso y sometiendo los resultados a una revisión sistemática.
3. Elaborar y utilizar estrategias personales de cálculo mental para la resolución de problemas sencillos a partir de su conocimiento de las propiedades de los sistemas de numeración y de los algoritmos de las cuatro operaciones básicas (suma, resta).

En el desarrollo del bloque temático sobre "Números y operaciones" el DCB incluye las siguientes orientaciones curriculares:

Hechos, conceptos y principios

3. Las operaciones de suma, resta.
   - Situaciones en las que intervienen estas operaciones: la suma como unión, incremento; la resta como disminución, comparación, complemento
   - La identificación de las operaciones inversas (suma y resta).
   - Símbolos de las operaciones

5. Algoritmos de las operaciones.
   - Algoritmos para efectuar las operaciones con números naturales.
   - Jerarquía de las operaciones y función de los paréntesis.
   - Algoritmos para aplicar la suma y resta al cálculo del tiempo y de ángulos.
   - Reglas de uso de la calculadora.

Procedimientos

9. Utilización de diferentes estrategias para resolver problemas numéricos y operatorios (reducir una situación a otra con números más sencillos, aproximación mediante ensayo y error, considerar un mismo proceso en dos sentidos -hacia adelante y hacia atrás- alternativamente, etc.).
10. Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en las resolución de problemas numéricos u operatorios.
11. Representación matemática de una situación utilizando sucesivamente diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico) y estableciendo correspondencias entre los mismos.
12. Decisión sobre la conveniencia o no de hacer cálculos exactos o aproximados en determinadas situaciones valorando el grado de error admisible.

13. Estimación del resultado de un cálculo y valoración de si una determinada respuesta numérica es o no razonable.
14. Automatización de los algoritmos para efectuar las cuatro operaciones con números naturales.
15. Automatización de los algoritmos para efectuar las operaciones de suma y resta con números decimales de hasta dos cifras y con fracciones de igual denominador.
16. Elaboración de estrategias personales de cálculo mental
    - Suma, resta
    - Utilización de la composición y descomposición de números, de la asociatividad y de la conmutatividad para elaborar estrategias de cálculo mental.
17. Identificación de problemas de la vida cotidiana en los que intervienen una o varias operaciones, distinguiendo la posible pertinencia y aplicabilidad de cada una de ellas.
18. utilización de la calculadora de cuatro operaciones y decisión sobre la conveniencia o no de usarla atendiendo a la complejidad de los cálculos a realizar y a la exigencia de exactitud de los resultados.

Actitudes, valores y normas
1. Rigor en la utilización precisa de los símbolos numéricos y de las reglas de los sistemas de numeración, e interés por conocer estrategias de cálculo distintas a las utilizadas habitualmente.
2. Tenacidad y perseverancia en la búsqueda de soluciones a un problema.
3. Confianza en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo mental.
4. Gusto por la presentación ordenada y clara de los cálculos y de sus resultados.
5. Confianza y actitud crítica en el uso de la calculadora.

1.2. Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM 2000)

Para los grados K-2 (Infantil y primer ciclo de primaria) el NCTM (2000) propone los estándares siguientes:

- *Comprender los significados de las operaciones y las relaciones entre ellas*
    - Comprender las diversos significados de la adición y sustracción de números naturales y las relaciones ente las dos operaciones.
    - Comprender los efectos de la adición y susbracción de números naturales.
    - Comprender las situaciones que implican multiplicación y división, como son las de agrupamientos de colecciones de objetos de igual cardinal y reparto equitativo.
- *Calcular de manera fluida y hacer estimaciones razonables*
    - Desarrollar y usar estrategias de cálculo con números naturales, particularmente sobre la adición y sustracción.
    - Dominar las tablas de sumar y restar
    - Usar una variedad de métodos y herramientas de cálculo, incluyendo objetos, cálculo mental, estimación, papel y lápiz y calculadoras.

Ejercicio:
1.Analizar las diferencias y semejanzas en las orientaciones curriculares siguientes respecto del estudio de los números naturales y la numeración,
- Diseño Curricular Base del MEC
- Las orientaciones curriculares de tu Comunidad Autónoma
- Principios y Estándares 2000 del NCTM.

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

El conocimiento de la suma y resta de números naturales debe organizarse alrededor de las siguientes facetas o componentes:

- los hechos numéricos básicos (tablas de sumar y restar)
- las técnicas orales de cálculo
- las técnicas escritas de cálculo
- las propiedades más importantes de dichas operaciones
- las situaciones en las que el uso de dichas operaciones es pertinente.

Por tanto, cualquier propuesta de enseñanza de la suma y la resta debe atender al desarrollo de estos aspectos del conocimiento. De esta manera, y a costa de almacenar más información en nuestro cerebro, podemos abreviar los procesos de recuento. Si tenemos que averiguar el cardinal de una colección de objetos que se compone de partes que ya están cuantificadas no será necesario efectuar un nuevo recuento, bastará con poner en acción nuestro conocimiento de los hechos numéricos de la suma, de las técnicas de cálculo asociadas a esa operación y del hecho de que esa operación es adecuada para resolver esa situación.

La experiencia de que si una colección se compone de una parte de tres objetos y otra de cinco objetos, en total habrá ocho objetos, es la que permite decir que "tres más cinco son ocho" en determinadas culturas, en particular en la nuestra. Del mismo modo, la constatación continua de que el cardinal de un conjunto de tres elementos al que se le añaden dos es el mismo que el cardinal de un conjunto de dos elementos al que se le añaden tres, nos lleva a la propiedad conmutativa de la suma; etc. Posteriormente, el conocimiento de los hechos numéricos básicos de suma y resta así como de sus propiedades permite construir técnicas de cálculo formales desligadas de las situaciones que justifican dichos cálculos.

2.1. Desarrollo de las técnicas de recuento abreviado

Los niños van dando significado a la suma y la resta a través del planteamiento y resolución de las situaciones aditivas. Pero en un primer momento, el desconocimiento de la tabla de sumar y restar impide a los alumnos resolver estas situaciones mediante sumas o restas, necesitando recurrir al recuento. El hecho, constatado una y otra vez por medio del recuento, de que si tenemos tres objetos y añadimos dos más tendremos cinco objetos en total es lo que permite decir al niño, en una fase posterior y sin necesidad de recuento, que tres más dos son cinco.

Ahora bien, el paso del recuento al conocimiento de las tablas no es inmediato, sino que es un proceso paulatino con etapas intermedias que en el caso de la suma, detallamos a continuación:

- *Recuento de todos.* El niño representa las dos colecciones de objetos de las que habla la situación mediante algún tipo de material (dedos, palotes, fichas, objetos diversos), las junta y lo vuelve a contar todo de nuevo.
- *Recuento de todos haciendo énfasis en el primer sumando.* El niño recita los números hasta llegar al primer sumando (sin construir una colección de objetos que represente ese sumando) y continúa contando la colección de objetos que representa al segundo sumando.
- *Recuento de todos haciendo énfasis en el sumando mayor.* Lo mismo que en el caso anterior, pero eligiendo como primer sumando el sumando mayor .

- *Recuento a partir del sumando mayor.* El niño construye una colección de objetos que representa el sumando menor y la cuenta partiendo del sumando mayor .

En el caso de la resta no nos encontramos con una secuencia de estrategias de recuento que evolucionan en el tiempo, pasándose de unas a otras, sino con estrategias de recuento diferentes en función de la situación que se propone y que pueden ser simultáneas:

- *Recuento de lo que queda.* Se utiliza en situaciones de ETE (estado, transformación, estado) en las que al conjunto inicial se le quitan elementos. Consiste en representar mediante objetos el conjunto inicial, quitar los elementos que indica la transformación y volver a contar lo que queda.
- *Recuento hacia atrás.* Se utiliza en las mismas situaciones que el caso anterior y consiste en contar hacia atrás desde el minuendo tantas veces como indica el sustraendo (representado mediante una colección de objetos, frecuentemente dedos). Esta técnica se utiliza poco por la dificultad que supone para los niños contar hacia atrás.
- *Recuento de la diferencia.* En las situaciones de ECE (estado, comparación, estado) en las que la incógnita es el término de comparación, se construyen los dos conjuntos, se emparejan y se cuentan los objetos que quedan sin pareja.
- *Recuento desde el sustraendo hasta el minuendo.* Se usa en las mismas situaciones que el caso anterior y consiste en contar desde el sustraendo hasta el minuendo llevando la cuenta con una colección de objetos (generalmente dedos) de las palabras que se dicen. Posteriormente, se cuenta la colección de objetos.

Estas estrategias se superan cuando el niño memoriza las tablas o desarrolla técnicas mentales (cálculo de dobles, complemento a cinco o a diez, sumar en vez de restar, etc.) para obtenerlas con rapidez.

2.2. Desarrollo de la comprensión de situaciones aditivas

Con respecto a la estructura lógica de la situación

Se observa que las dificultades de los niños a la hora de afrontar una situación aditiva dependen en gran medida de la estructura lógica de la situación y de la posición de la incógnita. Una gradación de menor a mayor dificultad podría ser la siguiente:

- EEE (con la incógnita en el estado final o en uno de los parciales) y ETE (con la incógnita en el estado final o la transformación).
- ECE (con la incógnita en la transformación o en el *primer* término de la comparación).
- ETE (con la incógnita en el estado inicial y ECE (con la incógnita en el *segundo* término de la comparación).
- TTT (cuando las tres transformaciones tienen el mismo sentido).
- TTT (cuando las transformaciones tienen diferente sentido)
- CTC y CCC.

Con respecto al grado de contextualización de la situación

Se observa que los niños entienden mejor las situaciones aditivas cuanto más contextualizadas están. La clasificación de las situaciones en función de un mayor a menor grado de comprensión de las mismas y, por consiguiente, de una mayor a menor capacidad de resolver con éxito, sería la siguiente:

- Situación que se refiere a materiales presentes en el aula y con el niño como actor.

- Situación hipotética contextualizada, con material a disposición del niño para que pueda efectuar una representación simbólica.
- Situación hipotética contextualizada, sin material a disposición del niño. En una primera fase el niño recurre a los dedos o al dibujo de palotes para efectuar los recuentos necesarios. En una segunda fase recurre a técnicas de cálculo orales o escritas.
- Situación formal, es decir, situación en la que se pregunta sin más por el resultado de una suma o resta sin referirlo a ningún contexto físico o social.

Los tres primeros tipos de situaciones se engloban en la categoría de *situaciones concretas* -situaciones con un mayor o menor grado de contextualización-, en oposición a las situaciones formales o no contextualizadas.

Con respecto al tamaño de los datos

A los niños les resulta más difícil interpretar correctamente una situación aditiva cuanto mayor es el tamaño de los números que intervienen en ella. Se han realizado experiencias en las que se ha pedido a grupos de niños que resuelvan la misma situación, una vez con números pequeños y otra con números grandes, observándose que el porcentaje de resoluciones correctas disminuye sensiblemente en el segundo caso.

2.3. Errores en la ejecución de los algoritmos escritos de suma y resta

Los errores más frecuentes que cometen los niños al realizar los algoritmos son los siguientes:

a) De colocación de los números. Justifican los números a derecha en vez de hacerlo a izquierda o no hacen coincidir las columnas de las cifras del primer número con las columnas del segundo.

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 3 & 2 \\ + & 4 & 5 & \\ \hline & 6 & 8 & 2 \end{array}$$

b) *De orden de obtención de los hechos numéricos básicos*. Empiezan a sumar o restar por la columna de la izquierda y avanzan hacia la derecha. Este error viene favorecido por la tradición de enseñar primero el algoritmo sin llevadas, dejando la introducción de las llevadas para una segunda fase.

c) *De obtención de los hechos numéricos básicos*. Se equivocan en los resultados de la tabla de sumar o restar.

d) *De resta de la cifra menor de la mayor*. Restan la cifra menor de la mayor sin fijarse si corresponde al minuendo o al sustraendo.

$$\begin{array}{cccc} & 5 & 4 & 2 \\ - & 3 & 7 & 8 \\ \hline & 2 & 3 & 6 \end{array}$$

e) *De colocación de un cero*. Cuando la cifra del minuendo es menor que la cifra del sustraendo ponen como resultado el número cero.

$$\begin{array}{cccc} & 5 & 4 & 6 \\ - & 3 & 7 & 3 \\ \hline & 2 & 0 & 3 \end{array}$$

f) *De lugar vacío*. Ante un lugar vacío, no completan la operación u olvidan la llevada.

$$\begin{array}{rrr} 5 & 8 & 6 \\ - & 5 & 4 \\ \hline & 3 & 2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rrr} 5 & 4 & 6 \\ - & 5 & 4 \\ \hline 5 & 9 & 2 \end{array}$$

g) *De olvido de la llevada*. No incorporan la llevada a la columna siguiente.

h) *De escritura del resultado completo.* Cuando al operar una columna obtienen un número de dos cifras lo escriben completo en el resultado.

$$\begin{array}{rrr} & 3 & 6 \\ + & 5 & 6 \\ \hline 8 & 1 & 2 \end{array}$$

Ejercicio 2: Diagnóstico de competencias en la realización de sumas y restas formales orales

En la tabla siguiente se incluye una relación de tareas aditivas que se pueden usar para el diagnóstico de las competencias de los alumnos de 1er curso de primaria en la realización oral de sumas y restas formales. Utiliza esta pauta con algún niño de dicho nivel e identifica las tareas que supongan mayor dificultad.

Cada una de las operaciones siguientes puede plantearse como una suma (3+5=   ), una resta (8-5=   ), la inversa de una suma (3+   =8), la inversa de una resta (8-   =3), una descomposición en suma (8=3+   ), o una descomposición en resta (5=8-   ). Deben resolverse utilizando fichas, el ábaco u otro material, salvo cuando los niños son capaces de dar el resultado mentalmente y en poco tiempo.

1. Operaciones con términos y resultado menor o igual que cinco (operaciones que se abarcan con una sola mano)
   1+1=2; 1+2=3; 1+3=4; 1+4=5; 2+2=4; 2+3=5.
2. Operaciones con términos y resultado menor o igual que diez (operaciones que se abarcan con las dos manos)
   - De dobles: 1+1=2; 2+2=4; 3+3=6; 4+4=8; 5+5=10.
   - De complementos a cinco por defecto o exceso: 1+4=5; 2+3=5; 5+1=6; etc.
   - De complemento a diez por defecto: 1+9=10; 2+8=10; 3+7=10; 4+6=10; 5+5=10.
   - De operaciones en general: 1+6=7; 1+7=8; 1+8=9; 2+4=6; 2+6=8; 2+7=9; 3+4=7; 3+6=9.
3. Operaciones con términos y resultado menor o igual que 20:
   - De dobles: 6+6=12; 7+7=14; 8+8=16; 9+9=18; 10+10=20.
   - De complementos a diez por exceso: 10+1=11; 10+2=12; 10+3=13; 10+4=14; etc.
   - De complementos a quince por defecto o exceso: 14+1 =15; 13+2=15; 12+3=15, 11+4=15; etc.
   - De complementos a 20 por defecto: 19+1=20; 18+2=20; 17+3=20; etc.
   - De operaciones en general: 1+11=12; 1+12=13; ...; 8+11=19.
4. Operaciones con términos y resultado menor o igual que cien:
   - De decenas con unidades: 20+7)27; 60+2=62=; 30-4=26; 50-1=49, etc.
   - De decenas con decenas: 30+40=70; 60-50=10; etc.
     - o Dobles: 10+10=20; 20+20=40; 60-30=30; etc.
     - o Complementos a 100: 10+90=100; 20+80=100; 30+70=100; etc.
   - De decenas y unidades con decenas: 47+20=67; 55-10=45; 40-13=27; etc.
     - Restar todas las decenas: 32-30= 2; etc.
   - De decenas y unidades con unidades:
     - que no sopresan la decena: 45+3=48; 45-3=42; etc.
     - que sobrepasan la decena: 45+7=52; 45-7=38; etc.
   - De decenas y unidades con decenas y unidades:

- Dobles: 11+11=22; 12+12=24; 25+25=50; etc.

5. Operaciones con términos menores o iguales que cien y resultado mayor que cien:
   - De decenas con decenas: 60+70= 130; etc.
     - Dobles: 60+60=120; 70+70=140; etc.
   - De decenas y unidades con decenas: 77+50=127, etc.
   - De decenas y unidades con unidades: 98+6=104; etc.
   - De decenas y unidades con decenas y unidades.
6. Operaciones con términos menores o iguales que mil.

3. SITUACIONES Y RECURSOS

En concordancia con el apartado anterior, haremos una propuesta de enseñanza con dos secuencias didácticas paralelas: la vía de las situaciones aditivas concretas y la de las situaciones aditivas formales. La primera es necesaria para establecer el sentido o significado de las operaciones, que viene asociado a las situaciones que resuelve, y también para justificar los hechos numéricos básicos y las técnicas de cálculo. La segunda es necesaria para consolidar la memorización de las tablas y las técnicas orales y escritas.

3.1. Secuencia didáctica de introducción de la suma y resta de números naturales

Para conseguir los objetivos didácticos, tendremos que plantear a los niños diferentes situaciones aditivas para que, a través de los recuentos, vayan construyendo las operaciones de suma y resta. Estas situaciones deben variarse recorriendo los problemas de combinación, cambio y comparación, así como las diferentes posiciones posibles de la incógnita. Si no se usase esta variedad de problemas, los niños decidirían que la operación que resuelve el problema es una suma porque aparece la palabra 'total' o la palabra 'más' o porque en el enunciado se habla de 'me dan', 'me regalan', etc.; o una resta porque se pregunta 'cuánto queda', o aparece la palabra 'menos', o se habla de 'quitar', etc.

Es también necesario plantear sumas y restas formales, es decir, descontextualizadas (por ejemplo, 5 + 9, 14 - 5, 25 + 2, etc.), para que los niños adquieran técnicas orales (y posteriormente, escritas) de suma y resta. Es la posesión de estas técnicas lo que convierte en interesante la decisión sobre cuál es la operación que resuelve un problema. Decidir si un problema se resuelve mediante la suma 47 + 10 o la resta 47 - 10 es una cuestión difícil que exige tomar en consideración diferentes aspectos de la situación. A un niño no le merece la pena plantearse una cuestión tan compleja si no tiene una técnica que le permita efectuar con rapidez la operación elegida. En ese caso es más cómodo representarse la situación con algún tipo de material y hacer directamente los recuentos necesarios.

En el primer caso, el niño tiene que resolver los problemas de manera autónoma, recurriendo, en un principio, a la representación con materiales y el recuento. La finalidad de estas tareas es que las estrategias iniciales de recuento evolucionen (al ritmo del niño) y que, a medida que se consolidan las técnicas de suma y resta, la base experiencial adquirida por el alumno en la resolución de esas situaciones le permita decidir qué operaciones resuelven el problema.

En el segundo caso, se trata de efectuar sumas y restas que inicialmente se resolverán por medio de recuentos. Pero conviene hacerles evolucionar cuanto antes hacia estrategias más rápidas. Para ello, se debe trabajar con distintos materiales estructurados (dedos de la mano, regletas Cuisenaire, ábaco, etc.) que permitan obviar los recuentos y proporcionen, por medio del aprendizaje de distintas configuraciones numéricas, el entramado necesario para establecer las técnicas orales de suma y resta.

Las dos vías: situaciones aditivas concretas y situaciones aditivas formales, deben desarrollarse a la vez. Una posible forma de hacerlo sería la siguiente:

- Se comienza trabajando las situaciones concretas de EEE, ETE, y ECE en el tramo numérico de 0 a 20, con materiales presentes en el aula y con el niño como actor. Al mismo tiempo los niños deben familiarizarse con los materiales estructurados y trabajar, mediante situaciones formales, la memorización de las operaciones que caben en una mano, de los dobles de una cifra (5 + 5, 6 + 6, etc.) y de los complementos a 10 (3 + 7, 6 + 4, etc.).
- Se prosiguen las situaciones concretas en el tramo 0 a 50, con casos en los que no haya posibilidad de recontar los dos términos para forzar la evolución de las técnicas de recuento y con presentación de situaciones hipotéticas contextualizadas referentes a números entre 0 y 20. Mientras tanto, a nivel formal, se continúa con la consolidación de la tabla de sumar y restar y de las operaciones con términos y resultado menor que 20.
- Se introduce el material estructurado en situaciones concretas con términos entre 0 y 100. Las situaciones hipotéticas contextualizadas con material a disposición del niño se trabajan entre 0 y 50. Además se trabajarán situaciones hipotéticas contextualizadas sin material entre 0 y 20, tratando que, en ese caso, los niños empiecen a expresar las soluciones en términos de sumas o restas. En la vía de operaciones formales se continúa con las sumas y restas de términos menores o iguales que 100 en forma oral.
- Se introducen tramos cada vez más altos de la sucesión numérica, siguiendo unas pautas similares a las comentadas en los items anteriores e introduciendo las técnicas escritas de cálculo.

3.2. Situaciones aditivas concretas

Recomendamos una secuencia de situaciones aditivas concretas, que el alumno debe resolver por sí mismo. El profesor debe controlar que el niño entiende el enunciado, pidiéndole que lo explique con sus propias palabras y animándole a que encuentre una estrategia de resolución. Es decir, se trata, básicamente, de situaciones a-didácticas [5].

Estas situaciones deben plantearse antes de hablar de sumas y de restas sin forzar al niño a decidir cuál es la operación que resuelve el problema, aun cuando ya domine las técnicas de sumar o restar. En un primer momento deben elegirse números pequeños, pero más adelante hay que utilizar números grandes y recurrir a recuentos abreviados y material estructurado.

Aun cuando al principio se permita al niño representar los dos datos de la situación, en momentos posteriores hay que imposibilitarle el recuento de alguno de los términos para forzarlo a pasar de las técnicas iniciales de "recuento de todo" y "recuento de lo que queda o de la diferencia" a estrategias más elaboradas, paso que muchos de los niños realizan espontáneamente.

Las variables didácticas de las situaciones aditivas concretas son las siguientes:

- *Significado de los números:* Cardinal, ordinal o medida.
- *Tamaño de los términos y resultado de la operación:* De 0 a 10, de 10 a 20, de 20 a 50, de 50 a 100, de 100 a 1.000, de 1.000 a 10.000, de 10.000 a 100.000, de 100.000 a 1.000.000, de 1.000.000 en adelante.

[5] Situación a-didáctica, aquél momento del proceso de enseñanza-aprendizaje en que el alumno está comprometido con la resolución de una tarea problemática que asume como propia.

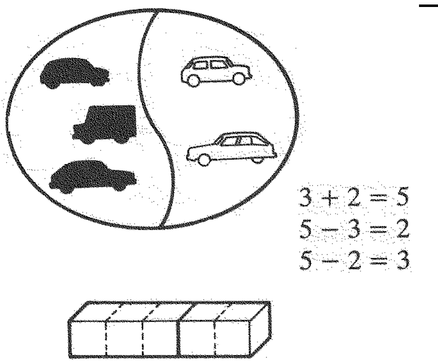
- *Estructura lógica de la situación:* Situaciones aditivas del tipo EEE, ETE, ECE, TTT , CTC o CCC.
- *Posición de la incógnita:* En el primer término, el término inicial o uno de los términos parciales; en el término medio de transformación o comparación; en el segundo término, el término final o el término total.
- *Sentido del término medio* (*sólo en las situaciones ETE, ECE* o *CTC*): creciente o decreciente; positivo o negativo.
- *Posibilidad de recuento de los términos:* Con posibilidad de recuento de los dos términos o de uno solo.
- *Grado de contextualización de la situación:* Situación que se refiere a materiales presentes en el aula y con el niño como actor; Situación hipotética contextualizada con material a disposición del niño para que pueda efectuar una representación simbólica; Situación hipotética contextualizada sin material a disposición del niño.
- *Tipo de material utilizado:* Estructurado o no estructurado
- *Número de datos:* Dos, tres o más.

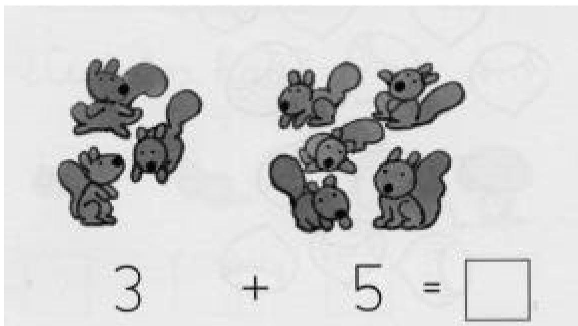
Ejercicios:

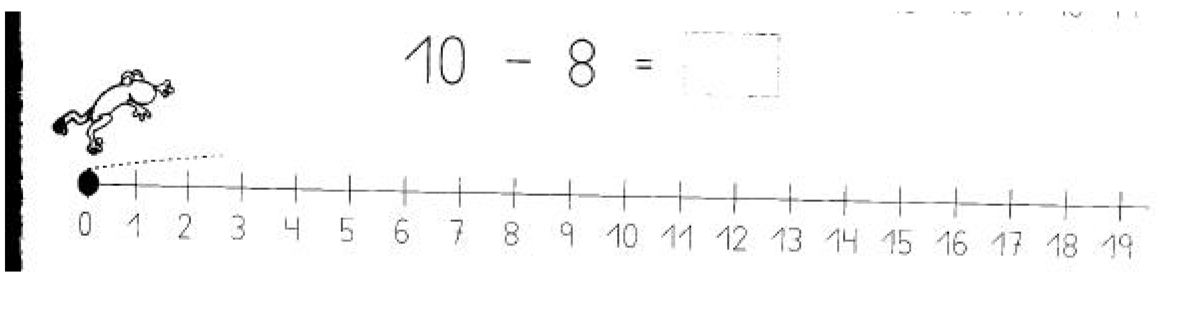
3. Preparar una secuencia de tareas para alumnos de 2º curso en las que se incluyan una muestra de valores de las variables didácticas para las situaciones aditivas concretas.

4. Analizar en un libro de texto de 2º curso las situaciones aditivas concretas que se incluyan, identificando los valores de las variables didácticas mencionadas en este apartado.

5. Indicar los valores particulares de las variables didácticas que intervienen en las tareas siguientes. Clasificar estas tareas según la estructura lógica descrita en la sección 1.2







3.3. Situaciones aditivas formales. Aprendizaje de algoritmos

En estas situaciones se presenta al alumno sumas y restas formales, es decir, ejercicios del tipo 3 + 2, 12 - 5, etc. En un primer momento se animará al niño a contar para obtener el resultado, dándole a la suma un sentido de reunión de objetos y a la resta un sentido de separación, pero rápidamente se pasará a utilizar materiales estructurados (ábacos, bloques, regletas) para evitar los recuentos y facilitar la memorización de los resultados y la adquisición de técnicas orales. Para ello, dichos materiales han tenido que ser trabajados previamente, habiéndose familiarizado el niño con las distintas configuraciones numéricas.

Las variables didácticas de las situaciones son las siguientes:

- *Tipo de operación:* Suma o resta.

- *Dirección de la operación:*
  Directa (por ejemplo, 12 + 5 = ? , 15 - 11 = ?),
  Inversa (por ejemplo, ? + 5 = 12, 15 - ? = 9), o
  Descomposición (por ejemplo, 12 = 5 + ?, 11 = 15 - ?).

- *Tamaño de los términos y del resultado de la operación:*
  - Operaciones que caben en una mano: 2+3, 5-1, etc.
  - Operaciones que caben en las dos manos: 4+4,8-2, etc.
  - Operaciones de la tabla de sumar o restar: 8+7, 11-6, etc.
  - Operaciones con términos y resultado menor o igual que 20: 13+6, 17-4, etc.
  - Operaciones con términos menores que 100 y resultado menor, igual o mayor que 100.
  - Operaciones con términos menores que 1000 y resultado menor, igual o mayor que 1000.
  - Operaciones con términos mayores que 1000.
- *Número de cifras de los términos:* Los dos términos de la operación tienen el mismo o distinto número de cifras.

- *Número de cifras significativas concurrentes:*
  - Términos de cifras significativas no concurrentes: 40+5, 130-8, 200-45, 307+20, 4.000+324, etc.
  - Términos con una cifra significativa concurrente: 60+30, 42-6, 343+20, 208-4, 7.000+5.000, etc.
  - Términos con dos cifras significativas concurrentes: 82-24, 66+31, 128+32, 435-420, 7.282-11, etc.
  - Términos con tres o más cifras significativas concurrentes: 347+482, 526-419, 11.297-4.762, etc.
- *Existencia de llevadas:* La operación implica o no llevadas.”

- *Técnica de cálculo:* Uso de material estructurado, técnica oral, técnica escrita, calculadora.

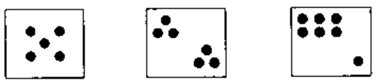
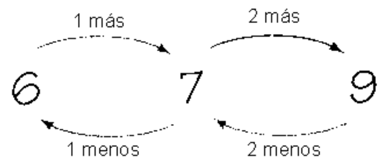
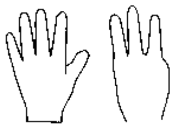
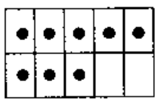
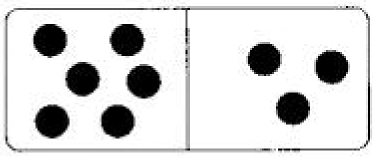
- *Tipo de material estructurado:* Dedos, regletas con tapa, regletas Cuisinaire, ábaco, etc.

Ejercicios:

6. Preparar una secuencia de tareas para alumnos de 2º curso en las que se incluyan una muestra de valores de las variables didácticas para las situaciones aditivas formales.

7. Analizar en un libro de texto de 2º curso las situaciones aditivas formales que se incluyan, identificando los valores de las variables didácticas mencionadas en este apartado.

La figura adjunta muestra ejemplos de tareas para el estudio de las relaciones aditivas entre números pequeños, apoyadas en el uso de material:

Patrones espaciales  Cinco Seis Siete (patrón aprendido) (3 y 3) (6 y 1 más)	Uno más /Dos más Uno menos /Dos menos 
5 y 10 como referentes   Cinco y tres más Dos para diez	Parte – Parte – Todo  “Seis y tres son nueve”

3.4 Recursos en Internet

Crucigrama de números

http://www1.tpgi.com.au/users/puzzles/page19.html

Descripción

Plantea crucigramas que se resuelven mediante operaciones aritméticas. Hay varios niveles de dificultad y puede controlarse el tipo de operación, así como los errores cometidos. Puede ser un recurso para el refuerzo de las tablas de las operaciones y la ejercitación en el cálculo.

Ejercicio

Ejercicio 8:

1. Explorar las diferentes opciones del programa.
2. Indicar los niveles y partes del currículo de primaria en que se pueden usar las distintas opciones.
3. Identificar las variables didácticas de las diversas tareas propuestas en el programa y los valores particulares de dichas variables implementados. ¿Existe algún tipo de control de los valores por parte del usuario?
4. Comparar los tipos de actividades que se pueden realizar usando el programa respecto a las que se hacen habitualmente con papel y lápiz. ¿Se pueden hacer actividades que no se puedan realizar sin este recurso?
5. ¿Cómo cambian las técnicas de solución?

4. TALLER DE DIDÁCTICA

4.1. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 1º a 3º curso de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizastes personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

1. Estudia el desarrollo del tema de "adición y substracción" en dichos niveles.
2. Indica en qué curso se inicia y cuando termina.
3. Identifica aspectos del desarrollo del tema en los manuales escolares que consideres potencialmente conflictivos.
4. Describe los cambios que introducirías en el diseño las lecciones propuestas para los cursos 1º y 2º de primaria.

4.2. Diseño de una evaluación

El siguiente problema es un problema aditivo de "estado-comparación-estado":

"Maria tiene 5 canicas. Juan tiene 6 canicas más que María. ¿Cuántas canicas tiene María?"

Este problema es de la forma a + b = c, y se pide el valor c, es decir el total. La incógnita es el total. Hay diferentes formas de variar este problema:

- Cambiando la posición de la incógnita;
- Cambiando el término de comparación: ¿*Cuántas más?*
- Cambiando el valor de los sumandos:
- Cambiando el contexto: combinación de objetos;...

Escribe todas las variantes que puedas de este problema cambiando algunas de las variables anteriores. Clasifica los problemas según la dificultad para los niños. Plantea dos o tres de estos problemas a un niño de entre 8 y 10 años. Analiza las estrategias que sigue para resolverlos. ¿Son diferentes las estrategias dependiendo del problema?

4.3. Análisis de problemas propuestos por niños

a) Se pide a una serie de niños que inventen un problema, cuya solución sea 9+3. Estas son algunas de las respuestas:

- "*Tres obreros de un edificio han colocado 9 ladrillos";*
- *Juan tenía 3 Euros y su mamá le dio 9, ¿cuántos tiene ahora?*
- *Clara tenía 3 huevos y Susana tiene 9 más*

  ¿Son completos los problemas propuestos? ¿Están bien planteados? ¿A qué modelo de situaciones aditivas corresponde?

b) Se pide a una serie de niños que inventen un problema, cuya solución sea 72-29 Estas son algunas de las respuestas:

"Un cocodrilo tenía 72 dientes, al comer algo se le cayeron 29, ¿cuántos le quedaron?
"Juan tiene 20 años, el abuelo tiene 72, ¿cuántos años tiene la madre?
"En un tarro hay 72 caramelos, 29 niños acertaron y les dieron caramelos, ¿cuántos caramelos les dieron a cada uno?"
"Tomás tiene 72 bolas, Daniel tiene 29, ¿cuántas más tiene Tomás?

“Se cogen 72 lápices y 29 bolígrafos y se hace la resta”

4.4. Análisis de estrategias aditivas de los alumnos[6]

Las producciones de los alumnos de primaria propuestas en la página siguiente corresponden al siguiente enunciado:

"Tengo 45 imanes. Quiero pegar hojas en una pizarra metálica. Tengo dos tipos de hojas: pequeñas y amarillas, grandes y blancas. Utilizo 4 imanes para las hojas amarillas y 6 para las blancas. ¿Cuántas hojas puedo pegar?

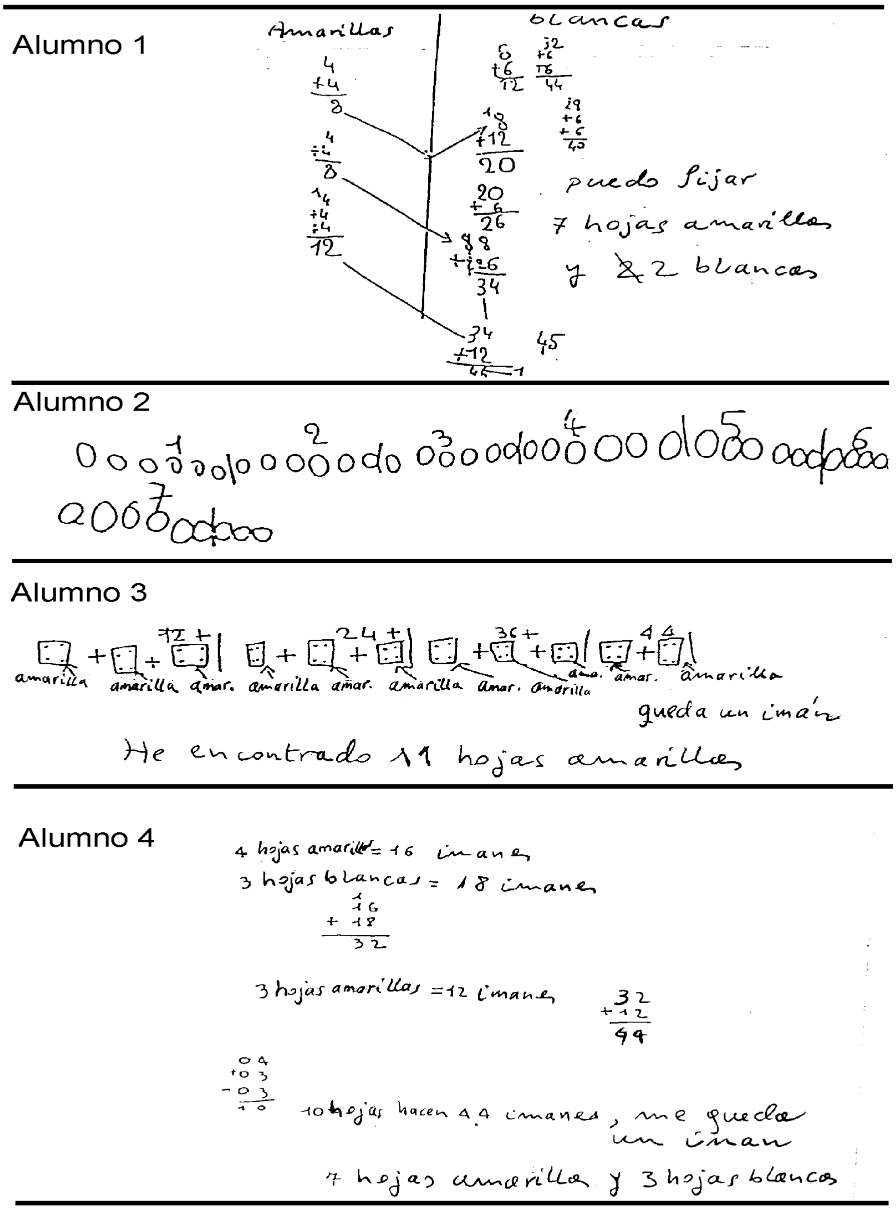
El maestro, al preparar esta actividad, ha organizado una lista de soluciones que minimizan el número de imanes no utilizados.

Nº de hojas amarillas	Nº de hojas blancas	Nº de imanes usados	Nº de imanes sobrantes
0	7	42	3
2	6	44	1
3	5	42	3
5	4	44	1
6	3	42	3
8	2	44	1
9	1	42	3
11	0	44	1

1.Interpreta los diferentes procedimientos realizados por los alumnos incluidos en el Anexo. Explicita el método de cada alumno y las presentaciones utilizadas. ¿Previó el maestro las soluciones dadas por los alumnos?
2. ¿Qué conocimientos son movilizados por los alumnos en el curso de esta actividad?
3. ¿Qué conocimientos y destrezas se pretenden con esta actividad?

Respuestas de cuatro alumnos a la tarea de fijación de hojas:

[6] Brousseau, Duval y Vinrich (1995, p. 18)



BIBLIOGRAFÍA

Brissiaud, R. (1993). *El aprendizaje del cálculo*. Madrid: Visor.

Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995). *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*. Talence: Irem D'Aquitaine.

Castro, E., Rico, L. y Castro, Enr. (1988). *Números y operaciones*. Madrid: Síntesis.

Ferrero, L. y cols (1999). *Matemáticas (3º a 6ª Primaria)* Madrid: Anaya.

Giménez, J. y Girondo, L. (1993). *Cálculo en la escuela. Reflexiones y propuestas*. Barcelona: Graó.

Gómez, B. (1988). *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.

Maurin, C. y Johsua, A. (1993). *Les structures numériques à l'école primaire*. París: Marketing (Ellipses).

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). Problemas aritméticos. Madrid: Síntesis.

Segovia, I. Castro, E. Castro, Enr. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.

Varela, A. y cols (2000). *Matemáticas (1º y 2º Primaria)*. Madrid: Anaya.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y SU DIDÁCTICA PARA MAESTROS

Capítulo 3:

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN ENTERA

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN EN PRIMARIA

Consigna:

A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

1) Resuelve los problemas propuestos.
2) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
3) Identifica diferencias y semejanzas entre los distintos problemas.
4) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
5) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
6) Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

1. Calcula y descubre un truco para recordar la tabla:

4x1	4x2	4x3	4x4	4x5	4x6	4x7	4x8	4x9	4x10
4									

2. Coloca en vertical y calcula: 34x2, 22x3, 71x4, 41x6

3. Expresa en forma de multiplicación y calcula: 557+557+557+557.

4. Copia y completa, como en el ejemplo: (5+8)x4= 5x4+8x4=20+32=52
   (9-6)x3=
   (7-5)x6=

5. En esta división hay algunos errores. Encuéntralos y corrígelos

```
 1526 | 23
 -132   43
 ----
  203
 -198
 ----
  006
```

6. Queremos vaciar un depósito que contiene 54 litros de agua utilizando un cubo en el que caben 9 litros. ¿Cuántos viajes tendremos que hacer?

7. Un objeto A pesa 18 quilos y un objeto B pesa tres veces menos que el A. ¿Cuánto pesa el objeto B?

8. ¿Cuál es el área de un rectángulo cuyos lados miden 8 y 6 cm, respectivamente?.

9. ¿Cuántas celdas tiene una tabla de 5 columnas y 3 filas?

10. Para celebrar un cumpleaños se han hecho varias bolsas. En cada una de ellas hay 5 paquetes de caramelos. Cada paquete tiene 6 caramelos. ¿Cuántos caramelos hay en cada bolsa?

11. Juan tiene una cantidad de dinero. Ignacio tiene 6 veces el dinero de Juan. Paco tiene la mitad del dinero de Ignacio. ¿Cuántas veces tiene Paco el dinero de Juan?

12. Dos automóviles han dado respectivamente cuatro y ocho vueltas a un circuito. El segundo recorrió 24.800 metros. ¿Cuál es la longitud del circuito? ¿Cuánto recorrió el primer coche?

13. Escribe todos los números múltiplos de 6 que sean menores que 100.

14. Expresa estos productos en forma de potencia: 7x7x7x7x7, 9x9x9

15. Escribe estos números en forma de potencia: 100.000, 1.000.000

16. Escribe los números entre 100 y 200 que tengan raiz cuadrada exacta.

17. Calcula: $\sqrt{1225}$, $\sqrt{2025}$

18. Calcula el valor aproximado de : 83x39, 31x51, 616x181, 624x38, 494x72, 72x48

B: Conocimientos Matemáticos

1. ESTRUCTURA DE LOS PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS DE UNA OPERACIÓN

1.1. Situación introductoria

A continuación presentamos una colección de problemas en cuya solución interviene la operación de dividir 20/3:

a) Resuelve los problemas

b) Explica las semejanzas y diferencias que encuentras entre estos problemas. Indica la clase de números que intervienen, las cantidades, operaciones y relaciones que se establecen entre estos elementos.

Problemas:

1) Disponemos de 20 pájaros a repartir en tres jaulas. ¿Cuántos pájaros se meterán en cada jaula?
2) Una pieza de 20 metros de tela se corta en trozos de 3 metros ¿Cuántos trozos resultan?
3) Repartimos una pieza de 20 metros de tela a tres modistas ¿Cuánta tela le corresponde a cada una?
4) Un camión de 3 toneladas de carga útil debe transportar 20 toneladas de carga ¿Cuántos viajes deberá hacer?
5) Si repartimos 20 pasteles entre 3 niños, ¿cuánto le toca a cada uno?
6) Pedro tiene 20 millones en acciones. Si el valor de la cotización en bolsa se reduce a la tercera parte, ¿cuánto dinero le queda?
7) Juan tiene una terraza rectangular de 20 m2. Si el ancho es de 3m, ¿cuál es el largo de la terraza?

1.2. Clasificación de los problemas multiplicativos

Así como las operaciones aritméticas de suma y resta se construyen inicialmente para abreviar los recuentos o procesos de medida, la multiplicación y división entera son un medio de abreviar los procesos de sumar (o restar) repetidamente una misma cantidad o repartir equitativamente una cantidad entre cierto número de seres u objetos. Por ejemplo, en lugar de sumar el número 6 nueve veces, decimos directamente que el resultado es 54, sin necesidad de efectuar las sumas repetidas, porque "sabemos multiplicar".

Las situaciones que dan sentido a la multiplicación y división entera (situaciones multiplicativas de una sola operación) se puede clasificar atendiendo *al papel que juegan los números* que intervienen en ellas que pueden ser:

- *estado*, cuando expresan el cardinal de un conjunto, el ordinal de un elemento o la medida de una cantidad de magnitud;

- *razón*, cuando expresan un cociente entre cantidades de magnitudes diferentes;
- *comparación*, cuando indican el número de veces que una cantidad de magnitud está contenida en otra cantidad de la misma magnitud.

Basándonos en esto, las situaciones multiplicativas de una sola operación se clasifican en:

Situación multiplicativa de razón (ERE): Situación en la que intervienen dos estados E_1 y E_2 que hacen referencia a magnitudes distintas y una razón R que expresa el cociente de E_2 respecto a E_1. Cuando la incógnita está en la razón R podemos interpretar la situación en términos de *reparto* equitativo y cuando está en el estado E_1 en términos de *agrupamiento* o descomposición en partes iguales.

Ejemplos:

- Juan compra 3 paquetes de cromos, cada uno de los cuales cuesta 25 pesetas. ¿Cuánto ha pagado en total?
- Un coche recorre 180 km. en dos horas. ¿Cuál ha sido su velocidad media?

Situación multiplicativa de comparación (ECE): Intervienen dos estados E_1 y E_2 que hacen referencia a una misma magnitud y una comparación C que indica el número de veces que hay que repetir uno de los estados para igualarlo al otro.

Ejemplos:

- Maria tiene 25 pesetas y su hermana Soledad 100. ¿Cuántas veces más dinero tiene Soledad que María?
- La varilla A mide 70 cm. de longitud y la varilla B mide 7 veces más que la A. ¿Cuánto mide la varilla B?

Situación multiplicativa de combinación (EEE): Intervienen dos estados E_1 y E_2 que expresan los cardinales de dos conjuntos o las medidas de cantidades de dos magnitudes y un tercer estado E_f que indica el cardinal del producto cartesiano de esos dos conjuntos o la medida de la cantidad de magnitud producto.

Ejemplos:

- En un baile hay 3 chicos y algunas chicas. Se pueden formar 6 parejas distintas entre ellos. ¿Cuántas chicas hay en el baile?
- En un ortoedro el área de la base es de 9 m^2 y la altura de 6 m. ¿Cuál es su volumen?

Situación multiplicativa de doble comparación (CCC): Situación en la que C_{12} expresa el número de veces que la primera cantidad de magnitud está contenida en la segunda, C_{23} indica el número de veces que la segunda cantidad de magnitud está contenida en la tercera y C_{13} establece el número de veces que la primera cantidad de magnitud está contenida en la tercera.

Ejemplo:

- Juan tiene un dinero. Ignacio tiene 4 veces el dinero de Juan. Paco tiene 5 veces el dinero de Ignacio. ¿Cuántas veces tiene Paco el dinero de Juan?

Las variables de los problemas multiplicativos, y los valores que pueden tomar, son los siguientes:

- *Significado de los números*: pueden ser cardinales, ordinales o medidas de cantidades de magnitud

- *Papel de los números en la situación:* pueden ser 'estados', 'razones' o 'comparaciones' (ya definidos al comienzo del apartado).
- *Posición de la incógnita:* puede ocupar uno cualquiera de los papeles adjudicados a las cantidades en la situación.
- *Sentido de la comparación:* indica si el primer término de la comparación es varias veces mayor o menor que el segundo término.

1.3. Construcción de las operaciones de multiplicación y división entera de números naturales

La experiencia acumulada en las situaciones anteriores permite construir la multiplicación y la división entera a partir de:

- la definición de los hechos numéricos básicos (tabla de multiplicar);
- el establecimiento de las propiedades de dichas operaciones;
- la invención de técnicas de cálculo eficaces (orales y escritas);
- la discriminación de las situaciones en las que el uso de dichas operaciones es pertinente.

Al igual que en el caso de la suma y la resta, esto supone un coste de memoria. También hay que advertir que así como, en la suma, resta y multiplicación a cada par de números les corresponde un único número, que es el resultado de la operación, en la división entera, dados dos números, el dividendo y el divisor, obtenemos como resultado otros dos números, el cociente y el resto[1]. Por tanto, la división entera es la técnica mediante la cual, dados dos números, D y d, podemos encontrar otros dos, q y r, tales que $D = dq + r$ y $r < d$.

Ejercicios:

2. Determina el menor número natural que multiplicado por 7 nos da un número natural que se escribe usando únicamente la cifra 1. ¿Y únicamente la cifra 2?

3. Expresa los números del uno al diez como resultado de operaciones entre números en las que, en total, intervengan cuatro treses.

4. Suponemos que los números naturales D y q son tales que D<4500, y q=82. La división entera del número D por d da como cociente q = 82, y resto r = 45. Buscar, justificando la respuesta, el conjunto de pares (D, d) que cumple dicha condición.

5. Resolver el problema anterior para r = 112. Discutir la existencia de soluciones según los valores del resto r.

6. Se resta de 3 en 3 a partir de 50 hasta que se obtiene el menor número natural posible: "50, 47, 44, 41, ..." ¿En qué número termina esta serie?

7. Se resta de 3 en 3 hasta obtener el menor número natural posible, pero a partir de 8932: "8932, 8929, 8926, ..." ¿En qué número termina esta serie? ¿Cuántos términos tiene esa secuencia de sustracciones? ¿Cuál es el número que ocupa el lugar 100?

8. Sabiendo que 8562 = (34 x 251) +28

[1] Los términos de un producto se llaman factores. El primer término se llama también multiplicando y el segundo término multiplicador. Los términos de una división entera son el dividendo, el divisor, el cociente y el resto. Cuando en una división el resto es cero se dice que la división es exacta.

a) ¿Cuáles son el cociente y el resto de la división entera de 8562 por 34?
b) ¿Cuáles son el cociente y el resto en la división de 8562 por 251?

9. Sabiendo ahora que 18846610 = (4973 x 3789) + 3913

c) ¿Cuáles son el cociente y el resto en la división entera de 18846610 por 4973?
d) ¿Cuáles son el cociente y el resto en la división entera de 18846610 por 3789?

10. Sabiendo que 1261541 = (4897 x 257) + 3012. ¿Cuáles son los cociente y el resto en la división entera de 126154100 por 489700?

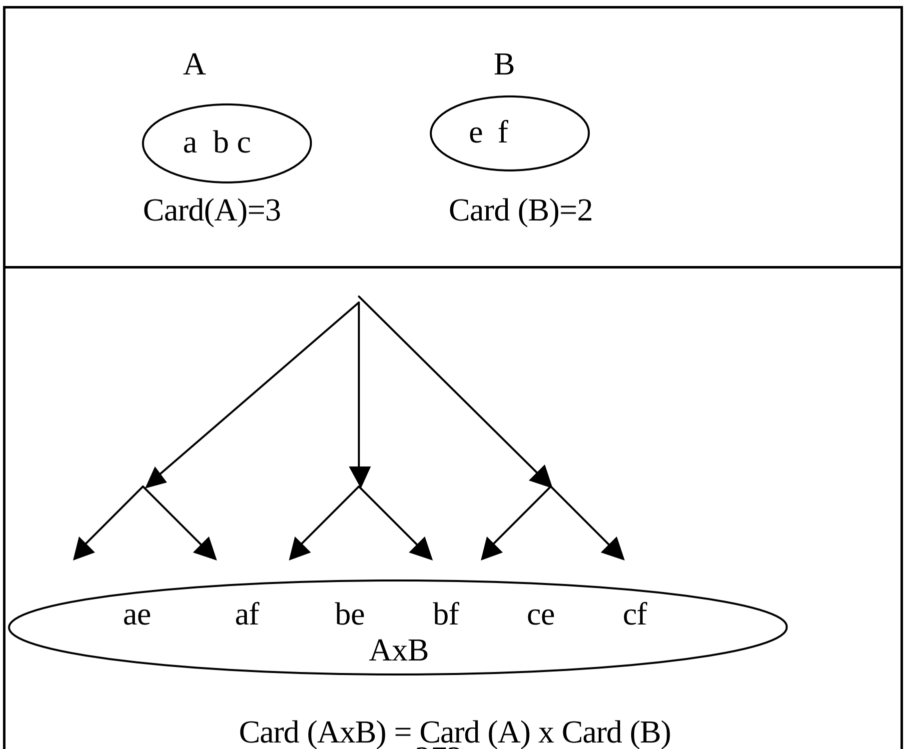
2. FORMALIZACIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS NATURALES

En las situaciones y problemas anteriores hemos introducido la multiplicación y división entera en el conjunto de los números naturales. Puesto que siempre que multiplicamos dos números naturales obtenemos otro número natural, decimos que la multiplicación es una *operación* en el conjunto de los números naturales. La división no es una operación en el conjunto de números naturales, pero si en el de los números racionales (que incluye los números negativos).

Estas operaciones se pueden dotar de diversos significados a partir de los cuales los niños pueden comprender sus propiedades básicas, lo que los preparará para el aprendizaje y la comprensión de los algoritmos de cálculo. También se han formalizado desde el punto de vista matemático. A continuación introducimos diversas formalizaciones de estas operaciones conectándola cuando sea posible con los modelos concretos en que se apoyan.

Definición conjuntista de multiplicación

En esta definición se parte de la idea de producto cartesianos de conjunto. La multiplicación corresponde a la idea de repetición, pues al formar un producto cartesiano se repite cada elemento del primer conjunto junto a cada elemento del segundo. Recoge especialmente los problemas de combinación, como visualizamos en el siguiente esquema:



Definición: Dados dos números naturales a, b, se llama multiplicación axb al cardinal del conjunto producto cartesiano AxB, siendo A y B dos conjuntos cuyo cardinal es a y b, respectivamente.

Esta definición pone en juego dos operaciones bien distintas:

Por una parte la operación que se hace sobre los conjuntos (se combinan entre si dos colecciones formar una nueva colección con la totalidad de los elementos que pertenecen a cada uno de ellos; cada elemento de la nueva colección es un par (ab) donde a es un elemento del primer conjunto y b uno del segundo).

Por otra parte la operación que resulta al nivel de los números de elementos (cardinales) que contienen, operación que es la multiplicación de dichos cardinales.

Propiedades:
- Clausura: El producto de dos números naturales es otro número natural.
- Asociativa: (axb)xc = ax (bxc)
- Commutativa: axb = bxa
- Existencia de elemento neutro: el natural 1; ax1=1xa = a, $\forall$ a $\in$ N
- Distributiva respecto a la adición: ax(b+c) 0 axb+axc para cualquieras números a, b y c.

Al tener la propiedad de clausura, la multiplicación es una ley de composición interna en N. Esto quiere decir que a cada par de números naturales se le hace corresponder otro número natural, que suele llamarse la suma de ambos números.

Definición recursiva de la multiplicación (basada en los axiomas de Peano)

Esta manera de definir la suma corresponder a uno de los aspectos del aprendizaje de la noción de adición por los niños: "repetir varias veces un mismo sumando”.

Al estudiar los números naturales vimos como se podían definir estos números a partir de los axiomas dados por Peano. A partir de ellos es posible definir la multiplicación en forma recursiva, partiendo de un número p cualquiera y de su siguiente sig(p). Esta es la definición:

- px 1 = p para todo número natural p
- p x sig(n) = pxn+n, para todo n diferente de cero.

En consecuencia, procedemos como sigue:
- Como 2 es el siguiente de 1, p x2= pxsig (1)= px1+p= p+p; se suma dos veces el número p
- Para multiplicar el número por 3, como 3 el siguiente de 2, p x3= pxsig (2)= px2+p= p+p+p; se suma tres veces el número p
- Así sucesivamente

Podemos comprobar como con esta definición podemos encontrar el producto de dos números cualquiera. Por ejemplo:

4x3= 4x S(2)= (4x2)+4 = (4xS(1))+4 = (4x1+4)+4=4+4+4

Es decir, 4 x 3 es el número que obtienes al repetir cuatro tres veces.

Definición conjuntista de división con resto

Dados dos naturales *n* y *d*, dividir *n* por *d* es repartir un conjunto de *n* elementos en tantos subconjuntos de *d* elementos como sea posible. El número de subconjuntos formados es el cociente y los elementos que quedan es el resto.

Este proceso se puede ver como una repetición de la sustracción.

Ejemplo: 27-5 = 22; 22-5=18; 18-5=13; ...

Definición aritmética de división entera:

Dados dos números naturales n y d, $d \neq 0$ y $n \geq d$, dividir n por d significa encontrar otros dos números naturales q y r tales que $n = d.q + r$, siendo $r < d$.

Una condición para q y r equivalente a la anterior es la siguiente:

$$q.b \leq a < (q+1).b; \qquad r = a-q.b$$

Si el resto es cero se dice que la división es *exacta*. En este caso la división se puede considerar como la operación inversa de la multiplicación, esto es, "calcular el número que multiplicado por *d* dé como resultado n (repartir un conjunto de n elemento en subconjuntos de *d* elemetos).

La división no es una ley de composición interna en N ya que a dos naturales, el dividendo y el divisor, se le hace corresponder no uno sino dos números naturales: El cociente y el resto. Se considera, sin embargo, como una de las operaciones aritméticas en N.

Una propiedad útil de la división entera:

Si se multiplica el dividendo y el divisor de una división por un mismo número *n*, no se modifica el cociente de la división, pero cambia el resto, que queda también multiplicado por *n*.

Aplicando esta propiedad obtenemos que 61000 dividido por 9000 da como cociente 7 y resto 7000, ya que 61 divido por 9 da como cociente 7 y resto 7, lo que se puede hacer mentalmente.

3. TÉCNICAS DE CÁLCULO DE LA MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN ENTERA

3.1. Estrategias de obtención multiplicaciones y divisiones enteras básicas

Ejercicios

11.¿Cuánto es veinticinco por doce? ¿Cómo obtienes la respuesta sin usar papel y lápiz?

12 . Calcula el cociente y el resto de la siguiente división entera 345678 : 23, restando múltiplos del divisor.

El uso de estrategias intermedias para obtener multiplicaciones y divisiones básicas es mucho menos frecuentes que en la suma y resta debido a que la escuela ejerce una fuerte presión para que los niños memoricen la tabla de multiplicar. Las estrategias más frecuentes para obtener alguno resultados de dicha tabla son:

- *Sumar reiteradamente.* Se multiplica sumando el multiplicando tantas veces como indique el multiplicador. Por ejemplo; "ocho por tres es ocho más ocho, dieciseis, más ocho, veinticuatro". También se puede utilizar en la división entera. Por ejemplo, para calcular "doce entre tres" se calcula cuántas veces hay que sumar tres para obtener doce.

- *Restar reiteradamente.* Se obtiene un cociente restando el divisor del dividendo todas las veces que sea posible. Por ejemplo: "veinticuatro dividido por seis, veinticuatro menos seis, dieciocho, menos seis, doce, menos seis, seis; cabe a cuatro" .
- *Repartir*. Consiste en efectuar la división por medio de la escenificación de una técnica de reparto. Por ejemplo: "veinticuatro dividido por seis; tengo que repartir veinticuatro objetos entre seis personas; si le doy dos objetos a cada una sobran doce; si le doy cuatro objetos a cada una no sobra ninguno, pues cuatro".
- *Recitar las tablas*. Se recita toda la tabla hasta llegar al resultado pedido. Por ejemplo, para calcular "seis por cuatro" se dice: "seis por uno, seis, seis por dos, doce, seis por tres, dieciocho, seis por cuatro, veinticuatro" .
- *Permutar términos*. Preguntan "ocho por seis" y pensamos "seis por ocho, cuarenta y ocho".
- *Multiplicar en vez de dividir*. Preguntan "treinta y cinco dividido por siete" y pensamos "siete por cinco, treinta y cinco, cinco".
- *Sumar o restar el multiplicando o multiplicador*. Preguntan "ocho por siete" y pensamos "ocho por seis, cuarenta y ocho, más ocho, cincuenta y seis" o bien "ocho por ocho, sesenta y cuatro, menos ocho, cincuenta y seis" .
- *Calcular el doble o la mitad*. Por ejemplo, "seis por cuatro; seis por dos, doce, por dos, veinticuatro" o "siete por cinco; siete por diez, setenta, la mitad treinta y cinco"
- *Calcular con los dedos*. Por ejemplo, para obtener el producto de 9 por cualquier otra cifra, por ejemplo, 6, se levantan las dos manos y se baja el dedo que hace el número seis del total de diez dedos. Los dedos que quedan a su izquierda representan el número de decenas del producto y los que quedan a su derecha el número de unidades.

Las tres primeras estrategias son propias de gente poco escolarizada. La cuarta se suele dar en los niños que están aprendiendo las tablas de multiplicar y todavía no controlan totalmente el proceso. La quinta y la sexta son muy frecuentes. La séptima y la octava se dan con una cierta frecuencia aunque son más habituales en números más grandes. Las estrategias de cálculo con dedos han desaparecido casi totalmente, pero fueron muy importantes en otras épocas.

3.2. Técnicas orales y de cálculo mental de multiplicación y división entera

El objetivo de las técnicas orales es redondear, obtener números sencillos, y son las siguientes:

- *Intercambio de términos*. Consiste en intercambiar el orden de los factores. Por ejemplo, nos dicen "doce por veinticinco" y pensamos en "veinticinco por doce".
- *Supresión o añadido de ceros*. Se prescinde de los ceros finales de los números y se añaden después de efectuada la operación. Ejemplo: "siete mil por cincuenta; siete por cinco, treinta y cinco; trescientas cincuenta mil"; "mil quinientos dividido por treinta; quince entre tres, cinco; cincuenta" .
- *Distribución.* Se descompone uno de los números en sumandos o sustraendos y se aplica la propiedad distributiva. En el caso de la división sólo se puede descomponer el

dividendo. Ejemplos: "veinticinco por veinticuatro es veinticinco por veinte más veinticinco por cuatro; veinticinco por veinte, quinientos; veinticinco por cuatro, cien; seiscientos"; "veinticinco por veinticuatro es veinticinco por veinticinco menos veinticinco; veinticinco por veinticinco, seiscientos veinticinco; menos veinticinco, seiscientos"; "ciento sesenta y ocho dividido por catorce; ciento sesenta y ocho es ciento cuarenta más veintiocho; ciento cuarenta entre catorce, diez; veintiocho entre catorce, dos; diez y dos, doce" .

- *Factorización.* Consiste en descomponer en factores uno o los dos términos de la operación. Ejemplos: "veinticinco por veinticuatro; veinticuatro es cuatro por seis; veinticinco por cuatro, cien; cien por seis, seiscientos" ; "ciento ochenta dividido por quince; ciento ochenta entre tres, sesenta; sesenta entre cinco, doce" .
- *Compensación*. En el producto se multiplica un término por un número mientras el otro se divide por el mismo número. En la división entera se multiplican o dividen los dos términos por un mismo número. Ejemplos: "veinticinco por veinticuatro es lo mismo que cincuenta por doce; cincuenta por doce es cien por seis, seiscientos" ; "ciento ochenta dividido por quince es lo mismo que sesenta entre cinco, doce" .

La factorización y compensación modifican el resto cuando se utilizan en divisiones que no son exactas y éste tiene que ser reconvertido “a posteriori”. Por ejemplo, ciento ochenta y tres dividido entre quince tiene de resto tres. Sin embargo, si dividimos sesenta y uno entre cinco el resto es uno. Para reconvertir el resto es necesario aplicarle la operación u operaciones inversas de las aplicadas a dividendo o divisor .

3.3. Técnica escrita de multiplicación

Descripción del algoritmo de la multiplicación

Supongamos que queremos multiplicar 346 por 38. Haremos los pasos siguientes:

- Se elige como multiplicando el número mayor. Se escribe el multiplicando y debajo el multiplicador. Se traza una raya horizontal debajo del multiplicador.

346
x38
———

- Si el multiplicando o multiplicador son números acabados en ceros se prescinde de dichos ceros y, al finalizar el algoritmo, al resultado obtenido se le añadirán los ceros de multiplicando y multiplicador juntos.
- Se elige la primera cifra significativa del multiplicador empezando por la derecha y se multiplica por la primera cifra significativa del multiplicando, también empezando por la derecha.

4
346
x38
———
8

- Si el resultado de ese producto es menor que 10 se escribe debajo de la raya. Si es mayor o igual que 10 se escriben las unidades debajo de la raya y la cifra de las decenas (llevada) se guarda para añadirla a la operación siguiente.

3
346
x38
———
68

- Se pasa a multiplicar la misma cifra del multiplicador por la cifra siguiente del multiplicando y sumándole la llevada si existe. La cifra de las unidades del resultado se escribe bajo la raya, a la izquierda de la cifra ya escrita y la cifra de las decenas, si existe, se guarda para incorporarla al producto siguiente.

346
x38
2768

- Se continúa el procedimiento hasta llegar a la última cifra del multiplicando. El resultado de esta operación se escribe íntegro debajo de la raya.

3346
x38
2768
+10038
103148

- Se toma la cifra de las decenas del multiplicador y se repite el procedimiento anterior escribiendo el resultado debajo del resultado anterior y haciendo que la cifra de las unidades de este segundo resultado quede situada en la misma columna que la cifra de las decenas del primer resultado.

- Se continua el procedimiento hasta que todas las cifras del multiplicador han sido utilizadas. Si alguna de las cifras intermedias del multiplicador es un cero se prescinde de ella y el resultado de multiplicar la cifra siguiente por el multiplicando se escribe debajo del último resultado de manera que la cifra de las unidades del primero coincida en la misma columna con la de las centenas del segundo.

- Se traza una segunda raya horizontal debajo del último producto realizado y se procede a aplicar el algoritmo de la suma a los números situados entre las dos rayas.

- El número que aparece bajo la segunda raya es el producto de los dos números iniciales.

Descripción de la parte oral del algoritmo

Este algoritmo se acompaña de una cantinela oral cuyo objetivo es:

- facilitar la obtención de los hechos numéricos básicos de multiplicación;
- ayudar a retener en memoria la cantidad llevada;
- realizar oralmente la suma de números de dos cifras con números de una cifra.

Justificación del algoritmo

El algoritmo se justifica por la posibilidad de descomponer los números en sus unidades y por las propiedades distributiva del producto respecto a la suma y asociativa y conmutativa de suma y producto.

Por ejemplo, multiplicar 346 x 38 es lo mismo que multiplicar (300 + 40 + 6)(30 + 8) y teniendo en cuenta las propiedades asociativa, distributiva y conmutativa de sumas y productos, eso es lo mismo que (300 x 8 + 40 x 8 + 6 x 8) + (300 x 30 + 40 x 30 + 6 x 30). Si prescindimos de los ceros, esta expresión refleja el producto de cada una de las cifras del multiplicando por cada una de las cifras del multiplicador y la suma posterior de los resultados obtenidos, que es precisamente lo que se hace en el algoritmo.

3.4. Técnica escrita de división entera

Las técnicas escritas de suma, resta y multiplicación son algoritmos pero la que corresponde a la división entera no lo es, es un semi-algoritmo pues exige toma de decisiones en determinados momentos. Es un proceso que obliga a realizar tanteos, estimaciones y a rehacer alguna de sus partes si la estimación no resulta correcta.

Otra diferencia de la división entera escrita respecto a los algoritmos de las demás operaciones es que en ella se trabaja de izquierda a derecha mientras que en los otros los números se recorren de derecha a izquierda.

Descripción de la técnica escrita de división entera

- Se escribe el dividendo y a su derecha el divisor encuadrado por una línea vertical y otra horizontal.
- Si tanto dividendo como divisor acaban en cierto número de ceros, se mira cual de los dos acaba en menos ceros y esos ceros se suprimen tanto al dividendo como al divisor. Una vez terminada la división, al resto hay que añadirle tantos ceros como inicialmente se suprimieron al dividendo o al divisor.
- Empezando por la izquierda, se toman en el dividendo tantas cifras como tenga el divisor. Si el número así elegido es menor que el divisor se toma una cifra más.
- Se estima cuántas veces cabe el divisor en el número elegido (para esto se necesita una técnica auxiliar) y la cifra obtenida en la estimación se escribe debajo del divisor y será la primera cifra del cociente.
- Se multiplica dicha cifra por la cifra de las unidades del divisor y el resultado se lleva a la cifra de las unidades del número elegido en el dividendo para efectuar una resta.
- A la cifra de las unidades de este último número se le añaden el número de decenas necesarias para que la resta sea efectuable y el resultado de la resta se escribe debajo en la misma columna.
- Se multiplica de nuevo la primera cifra del cociente por la cifra de las decenas del divisor y al resultado se le suma la cifra de las decenas añadidas para efectuar la resta anterior. El número así obtenido se lleva a la cifra de las decenas del número elegido en el dividendo para proceder a restar. Se reitera el procedimiento hasta terminar de multiplicar la cifra del cociente por todas las cifras del divisor .
- Si, como consecuencia de una estimación errónea, la operación resulta imposible o el número que aparece escrito bajo el dividendo resulta ser mayor o igual que el divisor, debe borrarse la cifra del cociente y el número escrito debajo del dividendo y comenzar de nuevo.
- Una vez acabado este proceso se baja la cifra siguiente del dividendo y se coloca a la derecha del último número escrito bajo el dividendo. Con este nuevo número así obtenido, y en el supuesto de que sea mayor o igual que el divisor, se procede a estimar cuántas veces cabe el divisor en él, se escribe el resultado de la estimación como segunda cifra del cociente y se repite el procedimiento anterior hasta agotar todas las cifras del dividendo.
- Si el número al que hacemos referencia en el apartado anterior es menor que el divisor, se escribe un cero como siguiente cifra del cociente y en el dividendo se baja la cifra siguiente y se comienza de nuevo la estimación. Si no existe cifra siguiente que bajar la división habrá terminado.
- Por último, una vez finalizado el procedimiento, el número que aparece escrito debajo del divisor será el cociente de la división y el último número escrito debajo del dividendo será el resto.

3.5. Técnica auxiliar de estimación

Es una técnica oral que tiene los siguientes pasos:

- Si la parte del dividendo que se esta considerando tiene el mismo número de cifras que el divisor, se tiene en cuenta la primera cifra de ese dividendo (empezando por la izquierda) y la primera del divisor; si tiene una cifra más se consideran las dos primeras cifras del dividendo y la primera del divisor.
- Se calcula oralmente el cociente de dividir la primera o dos primeras cifras del dividendo por la primera cifra del divisor y el resto que quedaría.
- Se multiplica el cociente así obtenido por la segunda cifra del divisor y se compara la llevada que produce esta multiplicación con el resto que tenemos. Si la llevada es mayor que el resto hay que elegir un cociente que tenga una unidad menos. Si la llevada es menor en más de una unidad del resto se mantiene el cociente.
- Si la llevada es igual que el resto o difiere de él en una unidad menos hay que multiplicar el cociente por la tercera cifra del divisor, tener en cuenta la llevada y sumársela al producto del cociente por la segunda cifra del divisor. Se compara de nuevo la llevada así obtenida con el resto. Si la llevada es menor o igual que el resto el cociente se mantiene, si es mayor el cociente se disminuye en una unidad.

Descripción de la parte oral de la técnica

Esta técnica se acompaña de una cantinela oral cuyo objetivo es:

- facilitar la obtención de los hechos numéricos básicos de multiplicación y división;
- restar oralmente números de hasta dos cifras cuya diferencia es menor que una decena, utilizando la estrategia de "sumar en vez de restar";
- modificar directamente el minuendo en función del tamaño del sustraendo ayuda a retener en memoria la llevada;
- realizar oralmente la suma de números de dos cifras con números de una cifra.

Justificación de la técnica

La justificación del algoritmo se basa en la posibilidad de descomponer los dividendos en suma de números divisibles por el divisor y en la existencia de la propiedad fundamental de la división entera $(n = dq + r)$, la distributiva a derecha de la división respecto a la suma y la conmutatividad de producto y cociente $(a. b : c = a: c. b)$.

Por ejemplo, 3748 : 6 es lo mismo que (3600 + 148) : 6. Esto equivale, por la propiedad distributiva a izquierda de la división respecto a la suma, a 3600 : 6 + 148 : 6. Prosiguiendo con la idea de descomponer el dividendo en números divisibles por el divisor se tiene que 3748 : 6 = 3600 : 6 + 120 : 6 + 24: 6 + 4 : 6 = 600 + 20 + 4 + (4 : 6) = 624 + (4 : 6), lo que nos permite obtener el cociente, 624, y el resto, 4. Y esto es el fundamento de la técnica escrita de división entera.

Ejercicios

13. A continuación se realizan algunas operaciones utilizando técnicas orales. Indica en cada caso las técnicas utilizadas.

c) 2500 x 13, tres por veinticinco, setenta y cinco, mas doscientos cincuenta, trescientos veinticinco, treinta y dos mil quinientos.

d) 156 : 12, setenta y ocho dividido por seis, treinta y nueve dividido por tres, trece.

e) 15 x 24, es lo mismo que treinta por doce, lo mismo que sesenta por seis, treinta y seis, trescientos sesenta.

14. Realiza oralmente las siguientes operaciones, indicando en cada momento la técnica empleada:
524- 38; 127 + 289; 210 x 16; 360 : 24

3.6. Otras técnicas escritas de multiplicación y división entera

a) Algoritmo extendido de multiplicación.

Evita el problema de las llevadas pero resulta muy largo de escribir por lo que se usa poco. Además, resulta difícil decidir en qué columna debe colocarse cada uno de los productos parciales. Veamos el siguiente ejemplo:

			5	4	2	7
				3	7	5
					3	5
				1	0	
			2	0		
		2	5			
				4	9	
			1	4		
		2	8			
	3	5				
			2	1		
			6			
	1	2				
1	5					
2	0	3	5	1	2	5

b) Algoritmo extendido de división

En España se enseña como un algoritmo intermedio para llegar al algoritmo tradicional, pero la elección de un algoritmo de resta en el que las llevadas se le restan al minuendo en vez de sumárselas al sustraendo obliga en muchos países a presentar este algoritmo como un algoritmo terminal de la división.

5	6	4	0	2	1	4 3 5
4	3	5				1 2 9 6
1	2	9	0			
	8	7	0			
	4	2	0	2		
	3	9	1	5		
		2	8	7	1	
		2	6	1	0	
			2	6	1	

c) Multiplicación y división por duplicación

Se trata de una algoritmo histórico usado en muchas culturas; hoy en día ha caído en desuso. Para multiplicar 457 x 86 se escribe en una columna el número 457 y en otra el número 1 y se duplican sucesivamente esos números hasta que en la segunda columna nos acercamos lo más posible a 86. Finalmente se suman los términos de la primera columna que corresponden a términos de la segunda columna cuya suma sea 86.

~~4 5 7~~	1
9 1 4	2
1 8 2 8	4
~~3 6 5 6~~	8
7 3 1 2	16
~~1 4 6 2 4~~	32
2 9 2 4 8	64
3 9 3 0 2	

Para dividir 457: 86 se coloca en una columna el divisor 86 y en otra el número 1. Se duplican sucesivamente los números hasta que en la primera columna nos acercamos lo más posible al dividendo. Después se suman todos los términos de la primera columna cuya suma no sobrepase el dividendo. La suma de los términos correspondientes de la segunda columna nos da el cociente. El resto será 457 -430 = 27.

d) Multiplicación por doble y mitad

Ha sido un algoritmo habitual en sociedades iletradas donde el conocimiento de la tabla de multiplicar se sustituía por técnicas de calcular dobles y mitades.

86	1
172	~~2~~
344	4
430	5

Para multiplicar 457 x 86 se escriben los dos números y mientras el primero se dobla el segundo se divide por dos, prescindiendo de decimales, hasta llegar a la unidad. Al final se suman todos los términos de la primera columna que corresponden a números impares de la segunda columna.

~~4 5 7~~	87
9 1 4	43
1 8 2 8	21
~~3 6 5 6~~	10
7 3 1 2	5
~~1 4 6 2 4~~	2
2 9 2 4 8	1
3 9 3 0 2	

e) Multiplicación en "celosía"

Se trata de un algoritmo de multiplicación usado en Europa hasta el siglo XVI en el que fue sustituido por el actual. Es un buen algoritmo y se supone que las razones de su sustitución fueron de orden tipográfico. El multiplicando se escribe encima de la rejilla y el multiplicador a la derecha. En cada casilla se escribe el resultado de multiplicar las correspondientes cifras de multiplicando y multiplicador. Finalmente se suma en diagonales y el resultado del producto aparece debajo y a la izquierda de la rejilla.

4	3	4	x
1 / 2	9	1 / 2	3
2 / 4	1 / 8	2 / 4	6

1 5 6 2 4

f) División en "galera"

Fue usada hasta el siglo XVII en que se sustituyó por la técnica actual.

Equivale a un algoritmo de división extendido pero la colocación de los números es distinta.

Para dividir 44977 : 382 se seguían los pasos que reproducimos en la figura.

El cociente es 117 y el resto 283.

	67	
382	~~449~~77	1
	382	

	29	
	~~67~~5	
382	~~449~~77	11
	~~3822~~	
	~~38~~	

	2	
	~~29~~8	
	~~675~~3	
382	~~44977~~	117
	~~38224~~	
	~~387~~	
	~~26~~	

Ejercicios

15. Construye la tabla de multiplicar números naturales en base 6. Calcula el producto de los siguientes números que están expresados en base 6, haciendo los cálculos en base 6: $34521_{(6}$ x $123_{(6}$. Justifica con este ejemplo el algoritmo tradicional (disposición en colunmas de los resultados parciales) indicando las propiedades del sistema de numeración posicional y de las operaciones aritméticas requeridas.

16. Realiza la multiplicación y la división entera de 227 por 41 utilizando el algoritmo de duplicación.

71. Utiliza el algoritmo de resta sin llevadas para restar 17829 de 34234 y el algoritmo de multiplicación en celosía para multiplicar 258 por 3489.

3.7. Diferencias entre las técnicas orales y escritas

- Las técnicas orales se organizan en torno a nuestro sistema de numeración oral. En cambio, las técnicas escritas se basan en nuestro sistema de numeración escrito.
- Las técnicas escritas, salvo la de la división, son algorítmicas, mientras que las técnicas orales exigen una toma de decisiones que permita encontrar números "redondos" intermedios.
- Las técnicas orales manejan los números globalmente frente a las técnicas escritas que son analíticas, es decir, manejan los números descompuestos en dígitos.
- En las técnicas orales los números se trabajan de izquierda a derecha y en las escritas de derecha a izquierda, salvo en la división.
- No son técnicas independientes. Los algoritmos escritos necesitan un apoyo oral y con frecuencia las técnicas orales van acompañadas de un refuerzo escrito que permita mantener los números en la memoria.

3.8. Operaciones con calculadora

Actualmente, existe la posibilidad de realizar las operaciones con calculadora. Para ello necesitamos apretar las secuencias de teclas apropiadas para cada operación. Para obtener la suma, resta o multiplicación de los números 3489 y 276 se aprietan las teclas siguientes[2]:

$$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{8}\boxed{9}\boxed{+}\boxed{2}\boxed{7}\boxed{6}\boxed{=}$$

$$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{8}\boxed{9}\boxed{-}\boxed{2}\boxed{7}\boxed{6}\boxed{=}$$

$$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{8}\boxed{9}\boxed{x}\boxed{2}\boxed{7}\boxed{6}\boxed{=}$$

Una vez apretadas las teclas correspondientes el resultado de la operación aparece en la pantalla.

Resulta un poco más complicado el caso de la división entera. En las calculadoras ordinarias al apretar la secuencia de teclas siguiente:

$$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{8}\boxed{9}\boxed{:}\boxed{2}\boxed{7}\boxed{6}\boxed{=}$$

no se obtiene el cociente y resto correspondientes a la división entera, sino el cociente correspondiente a la división decimal.

Es decir, aparece en pantalla el número decimal 12.641304 (en las calculadoras el punto equivale a nuestra coma decimal).

Esto nos permite saber que el cociente de la división entera es 12. Para reconstruir el resto a partir de ese resultado, se le resta el cociente entero 12 al número que está en pantalla, se obtendrá 0.6413043; se multiplica ese resultado por el divisor 276 y el número natural 177 que aparece en pantalla será el resto de la división entera. Si el número que aparece es un decimal se redondea al entero más próximo.

[2] Esta secuencia no sirve para las Hewlett-Packard que usan el sistema de notación polaco.

Ejercicios:

18. Usando la función constante de la calculadora calcula el valor de
 9x9x9x9x9x9x9x9, o sea, 9^8
19. El producto de dos números consecutivos es 2070. ¿Qué números son?
20. Si la tecla de multiplicar está estropeada indica cómo se puede calcular el producto,
 1234 x 596
21. Calcula el valor exacto de la siguiente multiplicación:
 9765432156 x 132547965
22. Utiliza la memoria de la calculadora [M+] para calcular la expresión:
 (7984739 + 947326) : (3 x 5287710 - 603683)

23. Comprueba con la calculadora los siguientes patrones y complétalos hasta que puedas decir algo sobre su campo de validez.

1 . 8 + 1 = 9	9 . 9 + 7 = 88	
12 . 8 + 2 = 98	98 . 9 + 6 = 888	$65^2 - 56^2 = 33^2$
123 . 8 + 3 = 987	986 . 9 + 5 = 8888	$6565^2 - 5656^2 = 3333^2$
1234 . 8 + 4 = 9876	9876 . 9 + 4 = 88888	$656565^2 - 565656^2 = 333333^2$

3.9. Potencias, raíces y logaritmos

Además de las operaciones anteriormente citadas, se construye también en el conjunto de los números naturales una nueva operación, la potencia, para indicar productos repetidos. La consideración de esta operación no nos ahorra cálculos, ya que el cálculo de una potencia exige efectuar los productos repetidos, pero sí que permite escribir de forma abreviada dichos productos repetidos.

- Así, en vez de escribir 3 x3 x3 x3 x3 x3 x3 x3 x3 x3 escribimos 3^{10} y esto quiere decir que tenemos que multiplicar el número 3 por sí mismo 10 veces. En una potencia c = a^b se dice que a es la base y *b* el exponente.
- En la igualdad $5^3 = 125$ decimos que 125 es el cubo de 5 pero también podemos decir que 5 es la raíz cúbica de 125 y que 3 es el logaritmo en base 5 de 125.
- En general, si c = a^b entonces $a = \sqrt[b]{c}$ y $b = \log_a c$. El logaritmo y la raíz pueden considerarse como operaciones inversas de la potencia que nos permiten encontrar un exponente conocida una potencia y su base o encontrar la base conocida la potencia y el exponente.

Ejercicios

24. Antes de que se hicieran habituales las calculadoras, había muchas reglas para aligerar los cálculos. Una de ellas servía para calcular el cuadrado de un número terminado en 5. El resultado es un número terminado en 25, delante del cual se ponía el resultado de multiplicar el número que precede a 5 por ese mismo número aumentado en una unidad. Por ejemplo, 35^2 = (3.4)25 = 1225, 75^2 = (7. 8)25 = 5625. ¿Cuál es la justificación de esta regla?

25. Justifica si es cierta o falsa la siguiente regla: "Piénsese en dos números naturales consecutivos. Multiplíquense. El resultado multiplíquese por 4. Al resultado súmesele 1. Extráigase la raíz cuadrada del resultado. El número que resulta es la suma de los dos que se pensaron inicialmente.

26. Halla un cuadrado perfecto de la forma *AABB*.

4. MODELIZACIÓN ARITMÉTICA DE SITUACIONES FÍSICAS O SOCIALES

Como ya hemos visto, las operaciones aritméticas son útiles conceptuales que el hombre inventó para resolver ciertas situaciones físicas o sociales problemáticas. Pero, aunque al principio, dichas operaciones estaban directamente ligadas a determinadas acciones físicas, poco a poco, se abstrayeron y se pasó a considerarlas un dispositivo que asocia a dos números dados un tercer número siguiendo determinadas reglas.

Además, el número creciente de aplicaciones diferentes de las operaciones aritméticas hace que ya no se asocien a un problema particular. Se produce, por tanto, una disociación entre las operaciones y las situaciones que les dieron origen, convirtiéndose en un conocimiento separado de los problemas que resuelve. De modo paralelo, se desarrolló el concepto abstracto de número entendido como un elemento de un conjunto en el que están definidas unas operaciones que cumplen determinadas propiedades y desligado de las técnicas sociales de recuento y medida.

Este proceso de progresiva abstracción del número y las operaciones aritméticas es la base del desarrollo matemático occidental. Por otro lado, lo matemático se separa de lo matematizado. El conocimiento de las operaciones aritméticas, de sus propiedades y de las técnicas orales y escritas de cálculo nos proporciona una herramienta muy poderosa pero nos exige saber cuándo y dónde utilizarla. Aparece así una nueva problemática: la necesidad de relacionar las acciones, situaciones y datos con las operaciones aritméticas; es necesario decidir, por ejemplo, si el problema es "de sumar o de restar". La traducción de las acciones y datos de la situación a números y operaciones recibe el nombre de modelización aritmética de la situación.

En la escuela, las situaciones y problemas planteados no son situaciones "vividas" sino situaciones "narradas", que se presentan a través de un texto escrito o de una narración oral, son los problemas aritméticos escolares[3]. Esto añade una nueva dificultad: la relación entre acción y verbo ya que un mismo verbo puede describir varias acciones y una misma acción se puede nombrar mediante varios verbos distintos.

Problemas aritméticos de varias etapas

La estructura de los problemas que se modelizan por medio de varias operaciones combinadas es muy compleja y no admite clasificaciones simples como las que existen para las situaciones que se resuelven con una sola operación.

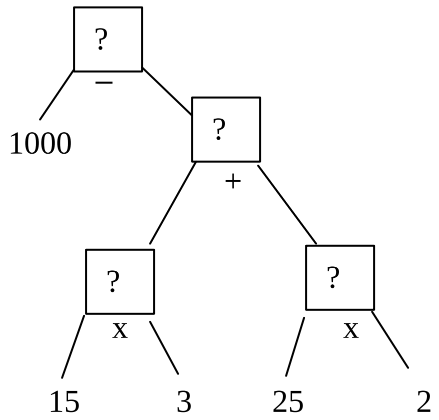
En los problemas de varias etapas hay que tomar decisiones respecto a qué operaciones hay que realizar , entre qué datos y en qué orden, es decir, hay que encontrar un camino que una los datos del problema, lo que se da, con las incógnitas del problema, lo que se pide. Cuando el camino se recorre desde las incógnitas hacia los datos se le llama "análisis" y cuando se recorre desde los datos hacia las incógnitas se le llama "síntesis" .

En general, el método de resolución de los problemas aritméticos es un método mixto de "análisis-síntesis": se parte de las incógnitas estableciendo las relaciones que existen entre ellas y los datos y definiendo, si es preciso, incógnitas intermedias, lo que proporciona el plan de solución del problema y después se ejecuta dicho plan desde los datos hasta las incógnitas, lo que proporciona la solución del mismo. Se puede construir un diagrama de estructura del problema que ponga de manifiesto qué operaciones hay que realizar, entre qué datos y en qué orden y el recorrido del diagrama en uno u otro sentido nos mostrará la doble vía del análisis-síntesis.

[3] Resolver un problema aritmético significa traducirlo en términos de números y operaciones a efectuar entre ellos, es decir, modelizar aritméticamente la situación a que hace referencia el texto, y ejecutar, finalmente las operaciones para obtener un resultado.

Ejemplo: Juan y María son hermanos. Juan compra 3 lápices a 15 ptas cada uno y María 2 cuadernos a 25 ptas cada uno. Pagan con 1000 ptas. ¿Cuánto les devuelven?

El diagrama de estructura de este problemq, que nos muestra el camino que hay que recorrer para llegar de la incógnita a los datos o viceversa será el siguiente:



Ejercicios

27. Unos granjeros almacenaron heno para 57 días, pero como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 112 kg. por día, con lo que tuvieron heno para 73 días. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?
28. En un taller de confección disponen de 4 piezas de tela de 50 m cada una. Con ellas se van a confeccionar 20 trajes que necesitan 3 m de tela cada uno. Con el resto de la tela piensan hacer abrigos que necesitan 4 m cada uno. ¿Cuántos abrigos pueden hacerse ?
29. Un aeroplano recorrió 1940 km el primer día, el segundo recorrió 340 km más que el primero y el tercero 890 km menos que entre los dos anteriores. ¿Cuántos kilómetros recorrió el aeroplano en total?
30. Un comerciante compró 23 resmas de papel a 5500 ptas cada una y las vendió, convertidas en cuartillas, a 830 ptas el millar. Sabiendo que el comerciante ganó 26220 ptas en la venta de todo el papel comprado y que una resma tiene 500 pliegos ¿cuántas cuartillas salen de cada pliego?
31. Un automóvil parte de un punto *A* con velocidad uniforme de 40 km/h hacia otro punto *E*. Dos horas después sale de *A* hacia *E* otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km/h. ¿A qué distancia de *A* se encontrarán los dos automóviles?

5. LA ESTIMACIÓN EN EL CÁLCULO ARITMÉTICO

Estimar el resultado de una operación o el de una medida de una cantidad es hacer una valoración aproximada del mismo. Por ejemplo, para estimar el resultado de 23x19, realizamos el producto 20x20=400. Algunas características de la estimación en el cálculo son las siguientes:

- La valoración se realiza, por lo general, de forma mental.
- Se hace con rapidez y empleando números sencillos.
- El valor obtenido no tiene que ser exacto, pero sí adecuado para tomar decisiones.

- El resultado admite soluciones diferentes dependiendo de la persona que lo realiza.

La estimación del resultado de los cálculos aritméticos es de utilidad en casos como los siguientes:

- Cuando no es posible conocer las cantidades implicadas en una operación de manera exacta. Por ejemplo, si queremos determinar la superficie de una pared y no podemos medir su altura; al elaborar un presupueto para un viaje; etc.
- Cuando un cálculo es difícil y nos interesa sólo una aproximación del resultado. Ejemplo: Si queremos saber el precio de una prenda de vestir cuyo precio está rebajado en un 15 por ciento.
- Cuando queremos comprobar si una operación realizada de forma exacta no tiene un gran error; por ejemplo, al revisar la cuenta de una compra, o la solución de un problema.
- Cuando se necesita expresar una información numérica de manera más clara; por ejemplo, el coche vale dos millones y medios de pesetas, en lugar de 2.495.000.

Por último, la estimación es útil ya que su práctica implica un dominio del sistema de numeración, de las relaciones numéricas y de las operaciones aritméticas, completando el dominio automatizado de los algoritmos de cálculo escrito.

Procesos de estimación en cálculo

Los procesos de estimación en cálculo consisten en modificar los datos de una operación para hacerla más sencilla. Esta modificación se lleva a cabo mediante las técnicas de redondeo, truncamiento o sustitución.

a) *Redondeo*. Redondear consiste en suprimir cifras de la derecha de un número y sustituirlas por ceros con el siguiente criterio: Si la cifra que se suprime es mayor o igual a 5 la que va a continuación se aumenta en una unidad; en otro caso se deja igual.

<u>Ejemplos</u>:

- 2346, redondeado a decenas sería 2350, y redondeado a las centenas sería 2300.
- la operación, 1281 + 3436 + 2794, redondeada a los millares sería
- 1000 + 3000 + 3000, y redondeada a las centenas sería: 1300 + 3400 + 2800. En el primer caso el error es inferior a 1500, y en el segundo es inferiror a 150.

Ejercicios

36. Valorar el error que se comete en la resta 27478 - 19824 dependiendo del tipo de redondeo que se realice.

37. Estimar los resultados de las siguientes operaciones:

1249 + 3684 + 6936 + 2368; 6248 - 1794
489 + 654 + 160 + 346 + 127; 149 x 151
1342 x 104; 997 x 364; 17484 x 1016; 104697:50

b) *Trucamiento.* Truncar consiste en suprimir dígitos de un número, a partir de un determinado orden de uniddes, y sustituirlos por ceros. Ejemplo: 2400 es un truncamiento de 2469.

Ejercicio

38. Resolver los ejercicios anteriores mediante truncamiento y comparar los resultados.

c) Sustitución. Este proceso consiste en sustituir los datos por otros próximos a ellos pero "compatibles" en el sentido de que la operación resulte sencilla. Ejemplo: 368:7 ≈ 350:7; 29 x 32 ≈ 30 x 30.

6. DIVISIBILIDAD EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

6.1. Definición de divisor y múltiplo. Notaciones y propiedades

Ejercicio

39. Imagínate una tabla de multiplicar que, en vez de tener diez filas y diez columnas, tuviera infinitas filas e infinitas columnas. ¿Cuántas veces aparecería en los resultados de la tabla el número 360?

Primera definición de divisor:

Dados dos números naturales *a* y *b* decimos que *a* es un divisor de *b* si existe un número natural *n* que multiplicado por *a* es igual a *b*, *na* = *b*.

Segunda definición de divisor:

Dados dos números naturales $a \neq 0$ y *b* decimos que *a* es un divisor de *b* si al efectuar la división entera de *b* por *a* se obtiene resto cero.

Estas dos definiciones son equivalentes en el caso de ser $a \neq 0$. En efecto, si se cumple la primera, al dividir *b* entre *a* obtendremos cociente *n* y resto cero. Por otra parte, si se cumple la segunda, *b* tendrá que ser igual al divisor *a* por el cociente *q* y ya hemos encontrado un número natural que multiplicado por *a* da *b*.

Definición de múltiplo:

Se dice que *a* es múltiplo de *b* si existe un número natural *n* que multiplicado por *b* es igual a *a*, *a* = *nb*.

Las siguientes expresiones son equivalentes: *a* es un divisor de *b*, *b* es un múltiplo de *a*, *a* divide a *b*, *b* es divisible por *a*. Para indicar que *a* es divisor de *b* se utiliza la notación *a* | *b* y para indicar que *b* es un múltiplo de *a*, $b = \dot{a}$

Notaciones algebraicas

Indicaremos los números naturales con letras cualesquiera: *a, b,* c, *n, m,* etc.

Si dividimos los números naturales por dos obtenemos una partición en dos subconjuntos: el conjunto formado por los números que son divisibles por dos, los números pares, y el conjunto formado por los números que dan resto uno, los números impares. Indicaremos un número par cualquiera con las expresiones: $2a$, $2n$, etc. y un número impar con: $2a + 1$, $2n - 1$, $2m + 3$, etc.

Si dividimos los números naturales por tres obtenemos tres subconjuntos: los números divisibles por tres, los que tienen resto uno y los que tienen resto dos. Los denotaremos por: $3n$, $3p$, ..., $3n + 1$, $3m - 2$, ..., $3n + 2$, $3a + 5$, ..., respectivamente.

De modo análogo se denotan los números que se obtienen al dividir por cuatro, cinco, etc.

Propiedades de la divisibilidad

La relación de divisibilidad tiene las siguientes propiedades:

a) Si un número es divisor de otros dos entonces es divisor de su suma.
b) Si un número es divisor de otros dos entonces es divisor de su diferencia.
c) Si un número es divisor de otro entonces es divisor de cualquiera de sus múltiplos.
d) Si un número es divisor de otro y multiplicamos los dos números por una misma cantidad la relación de divisibilidad se sigue conservando.
e) Si un número es divisor de otros dos entonces es divisor de su producto.
f) Si un número es divisor de otro entonces es divisor de cualquiera de sus potencias de exponente natural mayor o igual que uno.
g) La unidad es divisor de todos los números naturales.
h) Todo número natural es divisor de sí mismo.
i) Todo número natural es divisor de cero.
j) Cero sólo es divisor de si mismo.

Ejercicios

39. Escribe todos los divisores de los números: 1800, 5491 y 2187.

40. El número 12 tiene seis divisores: 1, 2, 3, 4, 6 y 12. Cuatro de ellos son pares y tres son impares.
    a) Describe la sucesión de números cuyos divisores sean todos, excepto el 1, pares.
    b) Describe la sucesión de números que tengan exactamente la mitad de sus divisores pares.

41. ¿Cuál es el menor número natural que al emplearlo como divisor de 68130 y 107275 origina los restos 27 y 49 respectivamente?

6.2. Criterios de divisibilidad

En general, para saber si un número es divisible por otro se efectúa la división entera y se comprueba si el resto es cero, pero, en algunos casos, existen reglas que permiten averiguar si un número es divisible por otro sin necesidad de efectuar la división. A estas reglas se les llama criterios de divisibilidad. Vamos a enunciar y justificar algunas de ellas. En lo que sigue suponemos que n es un número natural.

a) *Divisibilidad por 2, 5 o 10*

Si descomponemos el número n en decenas y unidades, $n = 10b + a$, se observa que el término $10b$ es siempre divisible por 2, 5 y 10. Por tanto, la divisibilidad de n por esos números depende de la de la cifra de las unidades, a, y, en general, podemos decir que:

> *un número es divisible por 2, 5 o 10 si, y sólo si, la cifra de las unidades es divisible por 2, 5 o 10, respectivamente. O también, un número es divisible por 2 si la cifra de las unidades es par, es divisible por 5 si la cifra de las unidades es 0 o 5 y es divisible por 10 si la cifra de las unidades es 0.*

b) *Divisibilidad por 4, 20, 25, 50 o 100*

Si descomponemos el número n, supuesto de tres o más cifras, en centenas por un lado y decenas y unidades por el otro, $n = 100c + \underline{ba}$, se observa que el término $100c$ es siempre divisible por 4, 20, 25, 50 y 100. Por tanto, la divisibilidad de n respecto a esos números depende de la divisibilidad de $\underline{ba}$ que representa las decenas y unidades de n. Podemos decir entonces que:

> *un número es divisible por 4, 20, 25, 50 o 100 si, y sólo si, el número formado por la cifra de las decenas y la de las unidades es divisible por 4, 20, 25, 50 o 100, respectivamente.*

c) *Divisibilidad por 8, 40, 125, 200, 250, 500 o 1000*

Si descomponemos el número n, supuesto de cuatro o más cifras, en millares por un lado y centenas, decenas y unidades por el otro, $n = 1000d + \underline{cba}$, se observa que el término $1000d$ es siempre divisible por 8, 40, 125, 200, 250, 500 y 1000. Por tanto, la divisibilidad de n respecto a esos números depende de la divisibilidad de $\underline{cba}$ que representa las centenas, decenas y unidades de n. Podemos decir entonces que:

> *un número es divisible por 8, 40, 125, 200, 250, 500 o 1000 si, y sólo si, el número formado por las centenas, decenas y unidades es divisible por 8, 40, 125, 200, 250, 500 o 1000, respectivamente.*

d) *Divisibilidad por 3 o 9*

Si descomponemos en todas sus cifras un número n de, por ejemplo, 4 cifras, obtenemos $n = 1000d + 100c + 10b + \mathrm{a} = 999d + d + 99c + \mathrm{c} + 9b + b + \mathrm{a} = (999d + 99c + 9b) + (d + \mathrm{c} + b + \mathrm{a}) = 9(111d + 11c + b) + (d + \mathrm{c} + b + a)$. Como el primer paréntesis va multiplicado por 9, ese término será siempre divisible por 3 y por 9 y, por tanto, la divisibilidad de n respecto a 3 o 9 depende de la divisibilidad de $d + \mathrm{c} + b + \mathrm{a}$. Esta demostración es generalizable a números con un número cualquiera de cifras. Por tanto, podremos decir que:

> *un número es divisible por 3 o 9 si, y sólo si, la suma de sus cifras es divisible por 3 o 9, respectivamente.*

e) *Divisibilidad por 11*

Un número es divisible por 11 si, y sólo si, sumando, por un lado, las cifras que ocupan lugar par y, por otro, las que ocupan lugar impar y restando el menor de los números obtenidos al mayor se obtiene un múltiplo de 11.

Ejercicios

42. Algunos pares de números tienen la propiedad de que la suma de los divisores de cada uno de ellos, excluyendo los propios números, es el otro número. A estos números se les llama *números amigos*. Comprueba que los números 1184 y 1210 son amigos.

43. Determina las cifras x e y para que el número
a) $2xy31$ sea divisible por 9.

b) *123xy* sea divisible por 35
c) *28x75y* sea divisible por 33.
d) *2x45y* sea divisible por 72.

44. Encuentra el mayor número natural que al emplearlo como divisor de 247, 367 y 427 origina en todos los casos resto 7.

45. Halla el menor número de 4 cifras que dividido por 4, 7 y 11 da de resto 3.

46. Halla el menor número natural que dividido por 11 tiene resto 6, dividido por 17 tiene resto 12 y dividido por 29 da 24 de resto.

6.3. Números primos y compuestos

Cualquier número *a* se puede dividir por 1 y *a*, que se llaman *divisores impropios* de *a*. A los demás divisores que pudiera tener *a* se les llama *divisores propios*.

Un número *primo* es un número natural distinto de 0 y de 1 que no tiene divisores propios. Un número *compuesto* es un número natural distinto de 0 y de 1 que tiene divisores propios.

Hacemos notar que 0 y 1 no se consideran números primos ni compuestos.

Teorema: Todo número compuesto se puede descomponer en un producto finito de factores primos y esta descomposición es única.

6.4. Técnicas para descomponer un número compuesto en factores primos

Primera técnica: Se descompone el número en producto de otros varios. Si estos son primos el proceso se detiene. Si alguno de ellos es compuesto se vuelve a descomponer en factores hasta que todos los factores obtenidos son primos. Esta técnica se emplea cuando las descomposiciones son fáciles de obtener. Por ejemplo:

$$18000=18.10.10.10.=2.3.3.2.5.2.5.2.5=2^4 3^2 5^3$$

Las sucesivas factorizaciones pueden también expresarse mediante un diagrama en árbol.

Segunda técnica: Es una técnica algorítmica. Consiste en recorrer la sucesión de los números primos comprobando si son divisores o no del número que queremos descomponer. Cuando se encuentra un número primo que es divisor se efectúa la división y se continua el proceso con el cociente. Se sigue así hasta que se obtiene un cociente 1 momento en el que el proceso queda concluido. Por ejemplo, si queremos descomponer en factores el número 173.512 se emplea el dispositivo gráfico siguiente:

$$\begin{array}{r|l}
173512 & 2 \\
86756 & 2 \\
43378 & 2 \\
21689 & 23 \\
943 & 23 \\
41 & 41 \\
1 &
\end{array}$$

y la descomposición factorial de 173.512 será 2^3x23^2x41.

6.5 Técnica para obtener la sucesión de números primos menores que uno dado

Esta técnica se conoce con el nombre de "criba de Eratóstenes". Para encontrar los números primos menores que un cierto *n* se escriben todos los números naturales hasta *n*. Se tacha el 1 porque no es un número primo. El primer número que queda sin tachar es el 2 que sí que es primo. Se recuadra y se tacha su cuadrado, 4, y, a partir de él, se cuentan los números de dos en dos y los que ocupan el segundo lugar se tachan. Una vez finalizado el recuento de dos en dos se toma el primer número que queda sin tachar a partir del 2: será e1 3. Se recuadra, se tacha su cuadrado, 9 y, a partir de él, se cuentan los números de tres en tres y cada tercer número se tacha. A continuación se toma el primer número que queda sin tachar a partir del 3 que será el 5. Se tacha su cuadrado, 25, y contando de cinco en cinco se tachan los números que ocupan el quinto lugar. Se prosigue este proceso hasta llegar a un número primo cuyo cuadrado sea mayor que *n* momento en el que el proceso habrá terminado. Los números recuadrados formarán la sucesión de números primos menores o iguales que *n*. Un ejemplo con los números hasta el 100 se muestra debajo.

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
11	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*
21	*22*	*23*	*24*	*25*	*26*	*27*	*28*	*29*	*30*
31	*32*	*33*	*34*	*35*	*36*	*37*	*38*	*39*	*40*
41	*42*	*43*	*44*	*45*	*46*	*47*	*48*	*49*	*50*
51	*52*	*53*	*54*	*55*	*56*	*57*	*58*	*59*	*60*
61	*62*	*63*	*64*	*65*	*66*	*67*	*68*	*69*	*70*
71	*72*	*73*	*74*	*75*	*76*	*77*	*78*	*79*	*80*
81	*82*	*83*	*84*	*85*	*86*	*87*	*88*	*89*	*90*
91	*92*	*93*	*94*	*95*	*96*	*97*	*98*	*99*	*100*

6.6. Técnica para comprobar si un número es primo

Para comprobar si un número es primo se divide por cada uno de los elementos de la sucesión de números primos, siguiendo el orden de menor a mayor, y constatando que en todos los casos se obtiene resto distinto de cero. El proceso se para en el momento en que al efectuar una de dichas divisiones se obtenga un cociente que sea menor que el divisor. A partir de ahí no hace falta seguir dividiendo y ya podemos decir que el número es primo.

- Si en una división se obtiene resto 0, el dividendo es divisible, no sólo por el divisor de la división, sino también por el cociente de la misma, por tanto es un número compuesto.
- En el momento en que el cociente es más pequeño que el divisor, ninguna división puede dar resto 0, pues si lo diera el cociente sería un divisor del número y eso ya se habría constatado en las anteriores divisiones efectuadas con números primos más pequeños. El número es primo.

Ejercicios

47. Halla la descomposición en factores primos de los números: 18000000, 60434 y 773.

48. Sólo hay un número con un único divisor: el 1. Los números primos tienen sólo dos divisores. ¿Cómo será la descomposición en factores primos de los números que tienen exactamente tres

divisores? ¿y de los que tienen cuatro, cinco o seis divisores, respectivamente? ¿Tienen alguna característica común los números que tienen un número impar de divisores?

6.7. Técnica para obtener los divisores y múltiplos de un número

Técnica para obtener los divisores de un número

a) Números con un sólo factor primo: Si la descomposición factorial del número es de la forma $p_1^{\alpha 1}$ sus divisores serán 1, p_1, p_1^2, p_1^3, ..., $p_1^{\alpha 1}$. En total $\alpha_1 + 1$.

b) Números con dos factores primos: Si la descomposición factorial del número es de la forma $p_1^{\alpha 1}$ $p_2^{\alpha 2}$ sus divisores se obtienen multiplicando cada una de las potencias de p: 1, p_1, p_1^2, p_1^3, ..., $p_1^{\alpha 1}$ por cada una de las potencias de p_2: 1, p_2, p_2^2, p_2^3, ..., $p_2^{\alpha 2}$. La mejor forma de hacerlo es construir una tabla multiplicativa de doble entrada:

	1	p_1	p_1^2	p_1^3	....	$p_1^{\alpha 1}$
1						
p_2						
p_2^2						
p_2^3						
. ..						
$p_2^{\alpha 2}$						

El número total de divisores es $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)$.

c) En el caso general, $n = p_1^{\alpha 1} p_2^{\alpha 2} p_3^{\alpha 3} \ldots p_m^{\alpha m}$ los divisores se obtienen multiplicando cada una de las potencias de p_1: 1, p_1, p_1^2, p_1^3, ..., $p_1^{\alpha 1}$ por cada una de las potencias de p_2: 1, p_2, p_2^2, p_2^3, ..., $p_2^{\alpha 2}$; cada uno de esos productos se multiplica por cada una de las potencias de p_3: 1, p_3, p_3^2, p_3^3, ..., $p_3^{\alpha 1}$; los nuevos resultados se vuelven a multiplicar por las sucesivas potencias del siguiente factor primo hasta que se multiplica por las sucesivas potencias de p_m.

En la práctica, con los dos primeros factores primos se construye una tabla multiplicativa de doble entrada; los resultados de esa tabla se llevan a una nueva tabla en la que figuran las potencias del tercer factor primo y así, se van construyendo tablas sucesivas hasta hacer intervenir al último factor primo. El número total de divisores será $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \ldots (\alpha_m + 1)$.

Técnica para obtener múltiplos de un número

Para obtener los múltiplos de un número natural *a* se multiplica sucesivamente el número *a* por cada uno de los números naturales: 0, 1, 2, 3, etc. Un número tiene infinitos múltiplos.

6.8. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de varios números

Decimos que *k* es un *divisor común* de los números a_l, a_2,. .., a_n si divide a todos ellos. Al mayor de los divisores comunes a dichos números se le llama *máximo común divisor* de a_l, a_2 ,.., a_n. Se denota por $mcd(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Decimos que k es un *múltiplo común* de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ si k es un múltiplo de todos ellos. Si tenemos en cuenta sólo los múltiplos comunes distintos de cero, al menor de los múltiplos comunes a dichos números se le llama mínimo común múltiplo de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Se denota por $mcm(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Dos números a y b se dice que son *primos entre si* si no tienen divisores comunes, esto es, si $mcd(a, b) = 1$.

Técnica de obtención del mcd y mcm de varios números

Para calcular el $mcd(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se descomponen los números en factores primos. Entonces, el *mcd* será el resultado de multiplicar todos los divisores primos comunes a $a_1, a_2, \ldots, a_n$, elevados al exponente menor con el que figuren en alguno de los a_i.

Para calcular el $mcm(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se descomponen los números en factores primos. Entonces, el *mcm* será el resultado de multiplicar todos los divisores primos de los números dados, tanto los comunes a todos los números como los que no lo son, elevados al exponente mayor con el que figuren en alguno de los a_i.

Ejercicios

49. Utiliza el algoritmo de Euclides para hallar el m.c.d. de
a) 3023 y 509 b) 126 y 2500 c) 1789 y 667297

50. Halla dos números naturales sabiendo que su m.c.d. es 14 y su m.c.m. 2310.

51. Halla dos números naturales sabiendo que su producto es 5850 *y* su m.c.d. es 15.

52. Halla dos números naturales cuyo m.c.d. es 65, su m.c.m. es 9100 y un número intermedio entre ambos es 270. .

53. Halla dos números naturales que sean proporcionales a 3 y 5 y tales que el producto de su m.c.d. por su m.c.m. sea 15360.

54. Halla dos números naturales cuya suma es 176 y su m.c.d. es 11.

55. Halla dos números naturales primos entre sí tales que su suma sea un número primo que dividido por 7 dé un cociente cuya parte entera sea 3. Sabemos además que el m.c.m. de los números buscados es 90.

56. En el contorno de un campo trapezoidal cuyos lados miden 72, 96, 120 y 132 m., respectivamente, se han plantado árboles igualmente espaciados. Calcula el número de árboles plantados, sabiendo que hay uno en cada vértice y que la distancia entre dos consecutivos es la máxima posible.

57. Dos cuerpos de ejército tienen 12028 y 12772 hombres, respectivamente. ¿Cuál es el mayor número de hombres que puede tener un regimiento si cada cuerpo de ejercito tienen que ser dividido en regimientos de igual tamaño?

58. Un faro emite señales diferentes: la primera cada 16s, la segunda cada 45s y la tercera cada 2m 30s. Estas señales se emiten simultáneamente en un cierto instante. ¿Qué intervalo de tiempo pasará hasta que se vuelvan a emitir simultáneamente?

7. TALLER DE MATEMÁTICAS

1. Investigación de propiedades aritméticas:
   a) ¿Son iguales las expresiones: (34+27)x5 y 34 + (27 x 5)? ¿En qué se diferencian?
   b) Compara $2^{12} + 2^{12}$ y 2^{24}. ¿Cuál es mayor?

2. Buscar dos números cuyo producto esté entre 1500 y 1600; otros dos cuyo producto esté entre 150 y 160.

3. Comprobación de estimaciones en cálculos:
   a) Estima cuáles de las siguientes divisiones tienen un cociente entre 20 y 50. Utiliza la calculadora para comprobar las respuestas:
      426: 13;   43368: 131;   4368: 13;   436: 131
   b) En las dos siguientes operaciones indicadas estima el valor desconocido. Comprueba la aproximación de la estimación con la calculadora
      43 x ____ = 2408;   12 x _____ = 672.

4. En las operaciones que vienen a continuación falta alguna cifra que está sustituida por guiones. Complétalas.

```
    - - 5          - - - 7 -       | 3 2 5
x   1 - -          - - -            -------
---------        -----------         1 - -
  2 - - 5          - - - -
1 3 - 0            - 9 - -
- - -             ----------
---------              - 7 -
4 - 7 7 -              - - -
                   ----------
                       0 0 0
```

5. Existen parejas de números tales que su producto es igual al de sus imágenes en un espejo. Por ejemplo, 23.64 = 46.32. Encuentra otras parejas de números que tengan esta propiedad. Trata de encontrar una regla que te permita obtener todas las parejas.

6. Elige un número cualquiera. Si inviertes el orden de sus cifras y restas el menor del mayor, observarás que se obtiene un número que es múltiplo de 9. Demuestra esta propiedad para números de 2, 3 y 4 cifras.

7. Resuelve los siguientes problemas de productos y cocientes. Indica, en cada caso, los valores de las variables que intervienen en la situación y el tipo de situación. Cuando intervengan varias operaciones en un mismo enunciado estúdialas por separado.

   a) Un carro transportó 81 sacos de patatas. En cada viaje llevaba 9 sacos. ¿Cuántos viajes hizo?

   b) Un comerciante compró 20 cajas de 12 bolígrafos cada una a 40 ptas. unidad. Otro compró 12 cajas de 40 bolígrafos cada una a 20 ptas. unidad. ¿Cuánto gastó cada comerciante ?

c) De mi casa al colegio hay 760 m.¿Cuántos cm ando si voy y vuelvo del colegio?

d) En el cumpleaños de Laura se iban a repartir 108 globos entre 12 niños. ¿Cuántos tocaban a cada uno? Si explotaron la tercera parte, averigua, sin dividir, los globos que recibió cada niño.

e) Se han llenado 5432 sacos de trigo. Cada uno pesa 92 kg. y sobran 20 kg. ¿Cuánto trigo había para llenar los sacos?

f) Cuatro hermanos decidieron repartirse sus ahorros. A cada uno le correspondieron 658 pesetas. ¿Cuánto dinero habían ahorrado entre los cuatro?

g) ¿Cuántos metros mediría un monte que tuviese cuatro veces la altura del Aneto?

8. Resuelve los problemas que se enuncian a continuación utilizando métodos aritméticos.

a) Se quieren repartir 1200 ptas. entre tres personas, de manera que una tenga la mitad de la otra, y la tercera persona tenga igual que las otras dos juntas. Calcula lo que corresponde a cada una.

b) Un demandadero tiene que ir 2 veces al mes a un pueblo situado a 25 km del punto donde reside. Al principio hacía los viajes en coche, costándole 15 ptas el recorrido de 25 km, pero después compró una bicicleta en 1830 ptas, dedicándola exclusivamente al citado servicio. Teniendo en cuenta que los neumáticos tienen que ser renovados cada 6000 km, siendo el precio de cada neumático 125 ptas, y que los demás gastos de conservación de la bicicleta vienen a ser de 60 ptas al año, calcular los años que habrán transcurrido para economizar el importe de la bicicleta

c) Pablo vendió 160 bocadillos a 200 ptas. cada uno. Cada bocadillo estaba compuesto de 75 gr. de jamón, 2 rebanadas de pan y mostaza. Pablo pagó 1000 ptas. por cada kilo de jamón, 60 ptas. por cada barra de pan (de 20 rebanadas) y utilizó 8 botes de mostaza a 50 ptas. cada uno. ¿Cuánta fue su ganancia?

d) Una costurera, cosiendo a mano, ganaba 50 ptas por día de trabajo. Compró una maquina de coser a crédito en 4800 ptas y el beneficio que con ella obtuvo lo dedicó a pagar su importe, consiguiéndolo en 32 semanas. Se desea saber lo que ganó la modista por día de trabajo, cosiendo a maquina, teniendo presente que no trabajó los domingos.

9. Representa de manera genérica:
   a) un múltiplo de 5.
   b) un número que al dividirlo por 8 dé resto 3.
   c) los números anterior y posterior a un múltiplo de 4.
   d) un número que no es múltiplo de 5

10. Demuestra que:
   a) la suma de dos números impares es un número par.
   b) la suma de tres números pares consecutivos es un múltiplo de 6.
   c) la suma de dos números impares consecutivos es un múltiplo de cuatro.
   d) la diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es siempre un número impar.

11. El número de páginas de un libro es mayor que 400 y menor que 500. Si se cuentan de 2 en 2, sobra una; de 3 en 3 sobran dos; de 5 en 5 sobran cuatro y de 7 en 7 sobran seis. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

12. Un pasillo rectangular de 860 cm. de largo y 240 cm. de ancho se ha embaldosado con baldosas cuadradas de la mayor dimensión posible para que cupieran un número entero de estas. ¿Cuál es la dimensión de cada baldosa? ¿Cuántas baldosas se han empleado?

13. El m.c.m. de los términos de una fracción es 340. Determina dicha fracción sabiendo que no se altera su valor si se suma 20 al numerador y 25 al denominador .

14. Demuestra que si n es un número par los números $n(n^2+4)$ y $n(n^2-4)$ son múltiplos de 8.

15. Siendo n un número natural, demuestra que $2n^3 + 3n^2 + n$ es divisible por 6.

C: Conocimientos Didácticos

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

1.1. Diseño Curricular Base del MEC

El Decreto del MEC (BOE 26-6-91) por el que se establecen las enseñanzas mínimas del área de matemáticas en la educación primaria establece las siguientes indicaciones para el bloque temático de "Números y operaciones":

Conceptos:

1. Las operaciones de multiplicación y división y sus algoritmos.
2. Reglas de uso de la calculadora

Procedimientos

1. Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en la resolución de problemas numéricos u operatorios.
2. Estimación del resultado de un cálculo y valoración de si una determinada respuesta numérica es o no razonable.
3. Elaboración de estrategias personales de cálculo mental con números sencillos.
4. Utilización de la calculadora de cuatro operaciones y decisión sobre la conveniencia o no de usarla atendiendo a la complejidad de los cálculos y a la exigencia de exactitud de los resultados.

Actitudes

1. Confianza en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo mental.
2. Gusto por la presentación ordenada y clara de los cálculos y de sus resultados.

Estas orientaciones curriculares fueron formuladas de manera más explícita en el DCB (Documento Curricular Base, MEC, 1989). Al finalizar la Educación Primaria, como resultado de los aprendizajes realizados en el área de Matemáticas, los alumnos habrán desarrollado la capacidad de:

1. Identificar en su vida cotidiana situaciones y problemas para cuyo tratamiento se requieren operaciones elementales de cálculo (multiplicación y división), discriminando la pertinencia de las mismas y utilizando los algoritmos correspondientes.

2. Elaborar y utilizar estrategias personales de cálculo mental para la resolución de problemas sencillos a partir de su conocimiento de las propiedades de los sistemas de numeración y de los algoritmos de las cuatro operaciones básicas (multiplicación y división).

En el desarrollo del bloque temático sobre "Números y operaciones" el DCB incluye las siguientes orientaciones curriculares:

Hechos, conceptos y principios

3. Las operaciones de multiplicación y división.

• Situaciones en las que intervienen estas operaciones: la multiplicación como suma abreviada, proporcionalidad (doble, triple, etc.); la división como reparto, proporcionalidad (la mitad, la tercera parte, etc.).

• Cuadrados y cubos.

• La identificación de las operaciones inversas (multiplicación y división).

• Símbolos de las operaciones

4. Correspondencias entre lenguaje verbal, representación gráfica y notación numérica.

5. Algoritmos de las operaciones.

• Jerarquía de las cuatro operaciones y función de los paréntesis.

• Reglas de uso de la calculadora.

Procedimientos

1) Utilización de diferentes estrategias para resolver problemas numéricos y operatorios (reducir una situación a otra con números más sencillos, aproximación mediante ensayo y error, considerar un mismo proceso en dos sentidos -hacia adelante y hacia atrás- alternativamente, etc.).
2) Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en las resolución de problemas numéricos u operatorios.
3) Representación matemática de una situación utilizando sucesivamente diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico) y estableciendo correspondencias entre los mismos.
4) Decisión sobre la conveniencia o no de hacer cálculos exactos o aproximados en determinadas situaciones valorando el grado de error admisible.
5) Estimación del resultado de un cálculo y valoración de si una determinada respuesta numérica es o no razonable.
6) Automatización de los algoritmos para efectuar las cuatro operaciones con números naturales.
   - Elaboración de estrategias personales de cálculo mental
   - Multiplicación y división con números de dos cifras en casos sencillos.
7) Identificación de problemas de la vida cotidiana en los que intervienen una o varias de las cuatro operaciones, distinguiendo la posible pertinencia y aplicabilidad de cada una de ellas.
8) utilización de la calculadora de cuatro operaciones y decisión sobre la conveniencia o no de usarla atendiendo a la complejidad de los cálculos a realizar y a la exigencia de exactitud de los resultados.

Actitudes, valores y normas

1. Tenacidad y perseverancia en la búsqueda de soluciones a un problema.
2. Confianza en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo mental.
3. Gusto por la presentación ordenada y clara de los cálculos y de sus resultados.
4. Confianza y actitud crítica en el uso de la calculadora.

1.2. Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM 2000)

En relación al aprendizaje de la multiplicación y división, para los grados 3-5, el NCTM (2000) propone el logro de las siguientes expectativas:

Comprender los significados de las operaciones y cómo se relacionan entre sí

- Comprender los diversos significados de la multiplicación y división
- Comprender los efectos de la multiplicación y división de números naturales.
- Identificar y usar las relaciones entre las operaciones para resolver problemas, tales como la división como operación inversa de la multiplicación.
- Comprender y usar las propiedades de las operaciones, tales como la distributividad de la multiplicación respecto de la adición.

Calcular de manera fluida y hacer estimaciones razonables

- Dominar las tablas de multiplicar y dividir y usar estas combinaciones básicas para calcular mentalmente hechos numéricos relacionados, como 30x50.
- Adquirir fluidez en la realización de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de números naturales.
- Desarrollar y usar estrategias de estimación de resultados de cálculos con números naturales y juzgar que son razonables.
- Seleccionar métodos y herramientas apropiadas para hacer cálculos con números naturales incluyendo cálculo mental, estimación, calculadoras, papel y lápiz, según el contexto y naturaleza de los cálculos y usar el método o herramienta seleccionada.

Ejercicio 1:

Analizar las diferencias y semejanzas en las orientaciones curriculares siguientes respecto del estudio de la multiplicación y división:
- Diseño Curricular Base del MEC
- Las orientaciones curriculares de tu Comunidad Autónoma
- Principios y Estándares 2000 del NCTM.

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

2.1. Progresión en el estudio de la multiplicación y división

Si bien la adición y la sustracción se comienzan a estudiar simultáneamente con el concepto de número, la multiplicación y la división son operaciones que requieren un cierto dominio de los números y de las operaciones de adición y sustracción.

Esto es claro si tenemos en cuenta el significado de estas operaciones. La multiplicación está ligada a verbos de acción tales como, "juntar tantas veces, repetir tantas veces, añadir tantas veces, reunir tantas veces, reiterar, etc." Es conveniente, por tanto, tener un cierto dominio de la suma que permita un cálculo seguro de los productos. Para no entorpecer el aprendizaje de la multiplicación con dificultades propias de la suma, es por lo que se suele dejar uno o dos cursos de diferencia entre el estudio de ambas operaciones.

En un principio, las situaciones problemáticas deben resolverse tanto con la suma como con la multiplicación, hasta que el alumno observe que con la multiplicación y más con el uso de las tablas, es más rápido y seguro.

Los dos términos de la multiplicación desempeñan funciones diferentes: uno de ellos es la cantidad que se repite (multiplicando). El otro factor nos dice las *veces* que se repite la cantidad inicial (el multiplicador); se refiere a un "objeto" (número de veces que se repite la acción) de naturaleza diferente que el multiplicando.

En cuanto al aprendizaje de las técnicas operatorias habría que comenzar por el producto de un dígito por un dígito, respetando las fases manipulativas, gráficas (figurativas), esquemáticas y simbólicas.

En el caso de la división se trata de, "repartir en partes iguales, hacer grupos iguales, restar reiteradamente, distribuir equitativamente, compartir, fraccionar, trocear, partir, etc." El dividendo es la cantidad a repartir, que hace, por tanto, referencia a cantidades de magnitudes discretas; por el contrario el divisor es el número de partes en que se reparte la cantidad expresada por el dividendo, siendo por tanto de naturaleza diferente.

Los requisitos básicos para afrontar las técnicas escritas operatorias de la división son los siguientes:

- Una correcta orientación espacial para las distintas direcciones que supone la técnica de la caja. Implica, simultáneamente, el manejo de las nociones de derecha, izquierda, antes, después, arriba, abajo.
- Mecanización comprensiva de la suma, resta y multiplicación.
- Práctica en la descomposición de números en órdenes de unidades (unidades, decenas, centenas, ...)

El aprendizaje del cálculo de la división requerirá también tener en cuenta las fases manipulativa, gráfica (figurativa) y simbólica, y la siguiente secuenciación:

- Una cifra en el dividendo y una en el divisor.
- Dos cifras en el dividendo y una en el divisor: ab : c, distinguiendo los casos, a>c, y a<c. Se pueden presentar dificultades cuando exista un cero en el cociente (Por ejemplo, 81: 2)
- Tres o más cifras en el dividendo y dos cifras en el divisor: abc:de. Los casos en que pueden surgir dificultades son:
    - Cuando hay que tomar tres cifras en el dividendo.
    - Cuando hay que colocar ceros en el cociente.

2.2. Principales dificultades en el aprendizaje

El aprendizaje de la multiplicación y división no está libre de obstáculos y dificultades. Indicamos algunas de estas dificultades sobre cuatro aspectos [4]:

a) Vocabulario y conceptos

En situaciones de multiplicación los términos “cada”, “a cada uno”, “para cada uno”, etc. tienen un sentido que, normalmente, no ha sido trabajo por los niños con anterioridad. Otra dificultad puede ser el empleo de la palabra ‘producto’. En el lenguaje ordinario un producto

[4] Martínez (1993, p. 141-142)

comercial es cualquier cosa que se compra, por lo que se debe prestar atención al nuevo significado que se le atribuye en la clase de matemáticas como resultado del cálculo con números.

b) Nivel de abstracción

Cuando el niño se enfrenta a la multiplicación lleva un cierto tiempo, normalmente, practicando con sumas y restas. Pero sumar y restar supone que los números que entran en esas operaciones funcionan todos dentro del mismo contexto, esto es, hacen referencia a cantidades que tienen el mismo significado en los dos sumandos y en el resultado. En algunas actividades es posible que se pida al niño que sume, por ejemplo, 3 peras y 2 kiwis para obtener 5 frutas; en este caso el niño debe entender que tanto las peras como los kiwis son "objetos" de la clase de las frutas, por lo que este problema planteará más dificultades que si la adición se refiere sólo a una clase de frutas.

En el caso de la multiplicación, el multiplicando es un número que indica la medida de una cantidad de magnitud, es decir, es un *estado*, mientras que el multiplicador nos dice las veces que se repite la cantidad inicial (es una *razón* o una *comparación*). Para calcular el coste de 3 kg de peras a 2 euros el kilo, multiplicamos 3 x 2 = 6 y decimos que el resultado es 6 euros; 3 es la medida de la cantidad de peso de las peras y 2 el precio (medida del valor económico) por unidad de peso, es decir, la razón entre el valor económico y el peso.

El resultado también puede ser una cantidad de una naturaleza diferente de los factores (área o volumen; mientras que los factores son longitudes o longitud y área). Todo esto supone un nivel de generalidad o abstracción superior y por tanto origen de dificultades en el proceso de estudio.

En el caso de la división debemos tener en cuenta la existencia de dos sentidos bien distintos para esa operación:

- según se considere como "resta sucesiva" de una cantidad fija d de otra D y lo que se debe hallar es el número de veces (q) que se puede restar hasta agotar D (la división como agrupamiento)
- o bien el sentido de "reparto en partes iguales" de una cantidad D entre un número dado de "sujetos" d, donde lo que se debe hallar es a cuánto tocan (q) (la división como distribución o reparto).

c) Dificultades en operaciones

La primera dificultad que suele pasar desapercibida es que una simple multiplicación como 123 x 12 es, en realidad, un conjunto variado de multiplicaciones que se escalonan y se combinan de acuerdo con unas reglas específicas. Este proceso queda notablemente oscurecido en el algoritmo habitual al suprimir pasos intermedios, lo que sin duda es una fuente de dificultades y errores. Estas dificultades son mayores incluso en el cálculo de la división donde deben realizarse procesos de tanteo, aparte de aplicar de manera coordinada las operaciones de multiplicación, adición y sustracción.

d) Solución de problemas

El estudio de la estructura semántica de los problemas multiplicativos y el análisis de los tipos de cantidades que intervienen como factores muestra la gran complejidad de este campo conceptual cuyo estudio integral abarca un período bastante dilatado de tiempo.

Según algunos estudios[5], parece que a los niños les resulta más fácil identificar la operación correspondiente a un problema verbal cuando se trata de una división que cuando se trata de una multiplicación. Por otro lado, parece que resuelven mejor las situaciones

[5] Puig y Cerdán (1988, p. 136)

multiplicativas de razón que las de comparación (salvo cuando en estas últimas la incógnita está en el primer término de la comparación), resultándoles las de combinación más difíciles de resolver que las otras. Dentro de las situaciones de razón, los problemas de reparto parecen ser más fáciles que los de agrupamiento.”

Ejercicio 2: Evaluación de destrezas de cálculo

A continuación incluimos algunos ítems de cálculo, junto con respuestas tipo dada por niños. Para cada respuesta evalúa los conocimientos que se ponen en juego, así como los posibles errores.

Item 1 Multiplica 8x4
Respuestas:

- *1x4=4, 2x4=8, 3x4=12, recita toda la tabla hasta 8x4=32, son 32*
- *seis veces cuatro son 24, siete veces cuatro son 28, ocho veces cuatro son 32*
- *Es lo mismo que sumar cuatro veces 8; son 32*
- *Creo que son 36*
- *Cuatro veces cuatro son 16; diez mas son 36 y 6 32; 32*

Item 2: Calcula 805x4
Un niño obtiene como resultado 3260, ¿Cómo puedes explicar el error?

Item 3: Calcula las siguientes divisiones:

436 | 4   85 | 5   702 | 3

En los siguientes resultados, ¿Qué parte del algoritmo no ha entendido el niño?

85 | 5 → 11

436 | 4 → 19

702 | 3 → 20

3. SITUACIONES Y RECURSOS

De acuerdo a los apartados anteriores, haremos una propuesta de enseñanza con dos secuencias didácticas paralelas: la vía de las situaciones multiplicativas concretas y la de las situaciones formales. La primera es necesaria para establecer el sentido o significado de las operaciones, que viene asociado a las situaciones que resuelve, y también para justificar los hechos numéricos básicos y las técnicas de cálculo. La segunda es necesaria para consolidar la memorización de las tablas y las técnicas orales y escritas.

3. 1. Situaciones multiplicativas concretas

Recomendamos una secuencia de situaciones multiplicativa concretas que el alumno debe resolver por sí mismo. El profesor debe controlar que el niño entiende el enunciado, pidiéndole que lo explique con sus propias palabras y animándole a que encuentre una estrategia de resolución. Es decir, se trata, básicamente, de situaciones a-didácticas [6].

[6] Situación a-didáctica, aquél momento del proceso de enseñanza-aprendizaje en que el alumno está comprometido con la resolución de una tarea problemática que asume como propia.

Se puede animar al niño a representar los datos del problema, usando alguno de los recursos que describimos en la sección 3.3.

Las variables didácticas de las situaciones multiplicativas concretas son las siguientes:

- *Tamaño de los términos y resultado de la operación:* De 0 a 50, de 50 a 100, de 100 a 1.000, de 1.000 a 10.000, etc.
- *Estructura lógica de la situación:* Situaciones de razón, comparación, combinación y doble comparación.
- *Posición de la incógnita:* En el primer estado, el segundo o la razón o comparación (en las situaciones de razón o comparación), o en los estados o comparaciones parciales o en el estado producto o comparación total (en las situaciones de combinación o doble comparación).
- *Sentido de la comparación:* De tantas veces más o de tantas veces menos.
- *Grado de contextualización de la situación:* Situación que se refiere a materiales presentes en el aula y con el niño como actor; situación hipotética contextualizada con material a disposición del niño para que pueda efectuar una representación simbólica; situación hipotética contextualizada sin material a disposición del niño.
- *Tipo de material utilizado:* Estructurado o no estructurado, gráfico, manipulativo, etc.
- *Número de datos:* Dos, tres o más.

Ejercicios:

3. Preparar una secuencia de tareas para alumnos de 3º curso en las que se incluyan una muestra de valores de las variables didácticas para las situaciones multiplicativas concretas.

4. Analizar en un libro de texto de 3º curso las situaciones multiplicativas concretas que se incluyan, identificando los valores de las variables didácticas mencionadas en este apartado.

3.2. Situaciones formales. Aprendizaje de algoritmos

En estas situaciones se presenta al alumno multiplicaciones y divisiones formales, es decir, ejercicios del tipo 12:5, 31x4, etc. En un primer momento se animará al niño a hallar sus propias estrategias, por ejemplo, sumando o restando, para dar sentido a las operaciones.

Rápidamente se pasará a utilizar materiales estructurados (ábacos, bloques, regletas) para facilitar la comprensión y adquisición de técnicas orales. Para ello, dichos materiales han tenido que ser trabajados previamente, habiéndose familiarizado el niño con las distintas configuraciones numéricas.

Las variables didácticas de las situaciones son las siguientes:

- *Tipo de operación:* multiplicación o división; en el caso de la división, exacta o no exacta.
- *Dirección de la operación:*

  Directa (por ejemplo, 12 x 5 = ? , 15 : 2 = ?),

  Inversa (por ejemplo, ? x 5 = 12, 16 - ? = 8),

  Descomposición, 12 = 4 x ?;   5= 15: ?

- *Tamaño de los términos y del resultado de la operación:*

  - Dobles o mitades de números de una cifra.

  - Operaciones de la tabla de multiplicar o dividir.

  - Operaciones con multiplicandos o dividendos de una cifra significativa y multiplicadores o divisores de una cifra.

  - Dobles o mitades de números de varias cifras significativas.

  - Operaciones con multiplicandos o dividendos de dos o más cifras significativas y multiplicadores o divisores de una cifra.

  - Operaciones con multiplicandos o dividendos de dos o más cifras significativas y multiplicadores o divisores de dos cifras significativas.

  - Operaciones con multiplicandos o dividendos de tres o más cifras significativas y multiplicadores o divisores de tres o más cifras significativas.

- *Existencia de llevadas:* La operación implica o no llevadas.
- *Técnica de cálculo:* Uso de material estructurado; técnica oral, técnica escrita, calculadora.
- *Tipo de material:* Regletas Cuisinaire, ábaco, bloques multibase, representaciones gráficas.

Ejercicios:

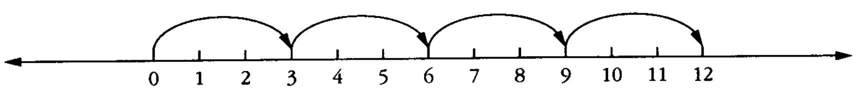
5. Preparar una secuencia de tareas para alumnos de 3º curso en las que se incluyan una muestra de valores de las variables didácticas para las situaciones multiplicativas formales.

6. Analizar en un libro de texto de 3º curso las situaciones multiplicativas formales que se incluyan, identificando los valores de las variables didácticas mencionadas en este apartado.

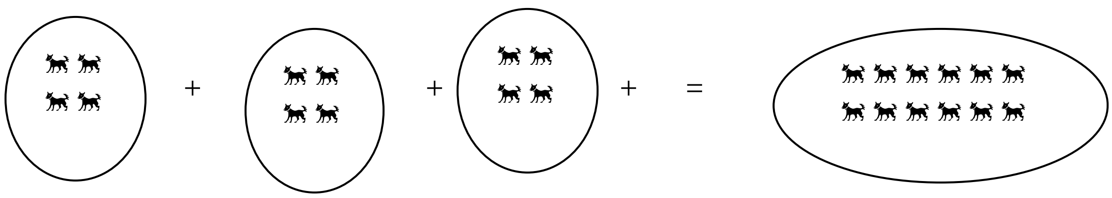
Ejercicio 7:

Enuncia problemas que correspondan a cada una de las representaciones gráficas siguientes.
Identificar los valores de las variables que se ponen en juego y clasificar los problemas según el esquema dado en la sección 1.1 (parte B).

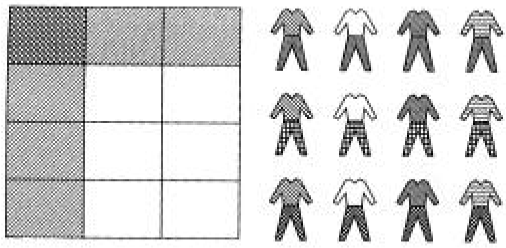
a)



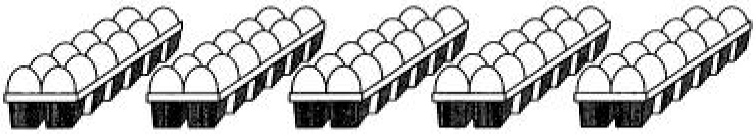
b)



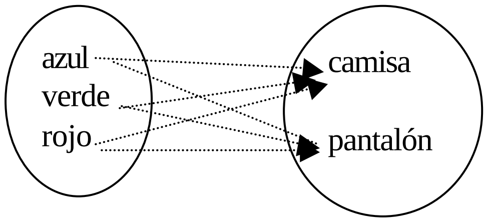
c)



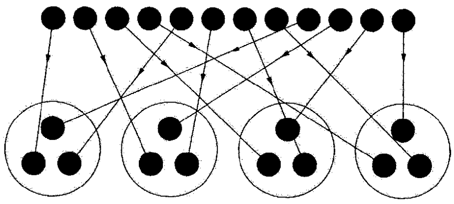
d)



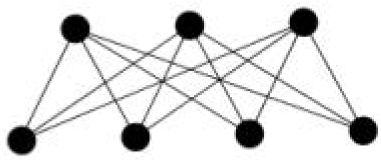
e)



f)



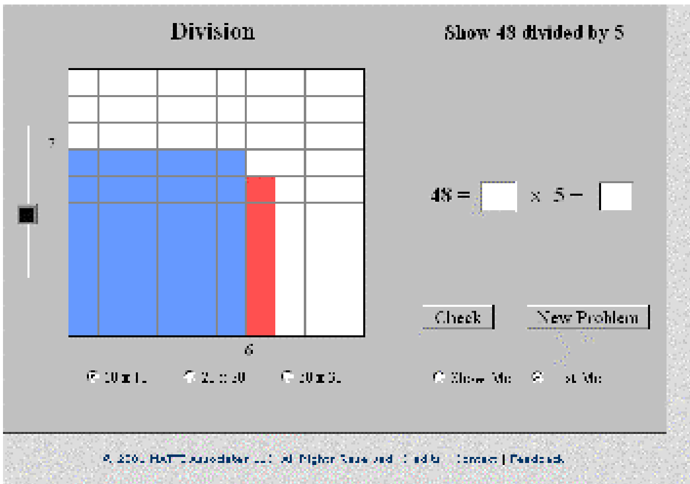
g)



3.3. Recursos en Internet

Representación rectangular de la división entera

http://matti.usu.edu/nlvm/nav/frames_asid_193_g_2_t_1.html



Descripción:

Este recurso permite representar la división entera en un diagrama rectangular mostrando el dividendo como un rectángulo cuya base y altura son el dividendo y cociente. El resto se representa como un rectángulo adosado de base unitaria.

Permite probar el conocimiento de las tablas de multiplicar y la comprensión de las nociones de cociente y resto, planteando divisiones al alumno que él debe resolver.

Ejercicio 7:

1. ¿Cuáles son los conocimientos matemáticos que se suponen conocidos para usar este programa? ¿Qué conocimientos sobre el programa se deben aprender para usarlo como recurso didáctico?
2. ¿Cuáles son los nuevos conocimientos matemáticos pretendidos? ¿Cuál es su naturaleza? (adquisición de una destreza, reconocimiento de una propiedad y su justificación, etc.)
3. Describir un recurso didáctico alternativo para el estudio de los conocimientos pretendidos (p.e., uso de la calculadora, papel y lápiz, etc.). Indicar las ventajas relativas de cada recurso.
4. Diseñar una unidad didáctica para el estudio del contenido pretendido, apoyada en el uso de este recurso, indicando:
   - las consignas que se darán a los alumnos,
   - las explicaciones complementarias que se consideren necesarias sobre el uso del recurso y recuerdo de conocimientos previos,
   - uso de recursos complementarios,
   - posibles explicaciones finales para sistematizar los conocimientos pretendidos.

4. TALLER DE DIDÁCTICA

4.1. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 2º y 3er ciclo de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizastes personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

1. Estudia el desarrollo del tema de "multiplicación y división" en dichos niveles.
2. Indica en qué curso se inicia y cuando termina.
3. Identifica aspectos del desarrollo del tema en los manuales escolares que consideres potencialmente conflictivos.
4. Describe los cambios que introducirías en el diseño de las lecciones propuestas para los cursos 3º a 6º de primaria.

4.2. Análisis de una prueba de evaluación[7]

En la tabla siguiente, parte izquierda, hay un ejercicio propuesto al comienzo del tercer curso de primaria, y a la derecha los porcentajes de los resultados obtenidos:

Efectúa la operación siguiente: 84 x3 -----	Respuestas correctas: 37'4% Otras respuestas: 52'2% Ninguna respuesta: 10'4%

a) La tasa de éxito es baja. ¿Es un resultado extraño?
b) Entre las respuestas erróneas están las siguientes:

84 x3 ------ 2312	84 x3 ------ 272	84 x3 ------ 242	84 x3 ------ 92

- Encuentra, en cada caso, lo que hace el niño
- Basándote en la numeración decimal, ¿cómo ayudarías a un alumno a reconstruir el algoritmo correcto?

4.3. Análisis de estrategias de cálculo mental /oral

Proponemos a un grupo de niños la siguiente tarea:
¿Cuánto es veinticinco por doce? ¿Cómo obtienes la respuesta sin usar papel y lápiz?

Para cada una de las respuestas siguientes analiza la estrategia seguida:

- "Treinta por doce es trescientos sesenta, cinco por doce sesenta, trescientos sesenta menos sesenta trescientos"
- "Veinte por doce es doscientos cuarenta, cinco por doce sesenta, doscientos cuarenta más sesenta trescientos"

[7] Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995)

- "Veinticinco por seis es ciento cincuenta, y ciento cincuenta, trescientos"
- "Veinticinco por dos cincuenta, cincuenta por seis, trescientos"
- "Veinticinco por cuatro cien, por tres trescientos"
- "Veinticinco por doce es lo mismo que cincuenta por seis y lo mismo que cien por tres, trescientos"

4.4. Evaluación de resolución de problemas

Item 4. Daniel tiene 12 caramelos, María tiene 6 veces más caramelos que Daniel. ¿Cuántos caramelos tiene María[8]

Este problema fue resuelto correctamente por el 85% de niños de 5º y 6º de primaria en una muestra de 216 niños.

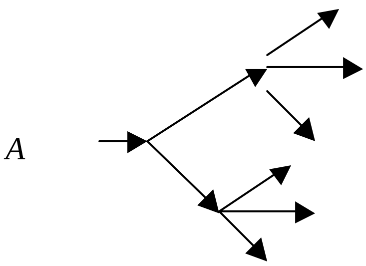
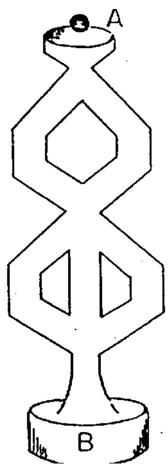
En este ítem hay diferentes variables:

- La posición de la incógnita: Estado inicial, término de comparación, estado final;
- Término de comparación: tantas veces más, tantas veces menos;
- Tamaño de los números

Escribe otros ítems similares cambiando las variables anteriores. ¿Crees que serán más difíciles? ¿Por qué?

¿Qué estrategias seguirían los niños en los distintos ítems que has escrito?

Item 5. A continuación reproducimos un ítem sobre problemas multiplicativos de combinación y las respuestas de varios chicos de 13 años. Para cada una indica los conocimientos mostrados y errores cometidos

"Dos caminos, por la derecha y por la izquierda" *"Dos caminos hasta el centro y tres mas, cinco caminos"* *" dos camimos hasta el centro; tres caminos desde el centro que se pueden combinar con los anteriores , seis caminos"* *Como se ve en el gráfico desde A salen dos caminos y en el centro de pueden tomar otros tres*  	¿Por cuántos caminos se puede ir desde A hasta B? 

[8] Castro, E.nr, Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa. Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada.

BIBLIOGRAFÍA

Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995). *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*. Talence: Irem D'Aquitaine.

Castro, E. (2001). Multiplicación y división. En E. Castro (Ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 203-230). Madrid: Síntesis.

Ferrero, L. y cols (1999). *Matemáticas (3º a 6ª Primaria)* Madrid: Anaya.

Giménez, J. y Girondo, L. (1993). *Cálculo en la escuela. Reflexiones y propuestas*. Barcelona: Graó.

Gómez, B. (1988). *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.

Martínez, J. (1991). *Numeración y operaciones básicas en la educación primaria*. Madrid: Editorial Escuela Española.

Maza, C. (1991). *Multiplicación y división. A través de la resolución de problemas*. Madrid: Visor.

Maurin, C. y Johsua, A. (1993). *Les structures numériques à l'école primaire*. París: Marketing (Ellipses).

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos*. Madrid: Síntesis.

Roa, R. (2001). Algoritmos de cálculo. En E. Castro (Ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 231-256). Madrid: Síntesis.

Segovia, I. Castro, E. Castro, Enr. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.

Udina, F. (1989). *Aritmética y calculadora*. Madrid: Síntesis.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y SU DIDÁCTICA PARA MAESTROS

Capítulo 4:

FRACCIONES Y NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE FRACCIONES Y NÚMEROS RACIONALES EN PRIMARIA

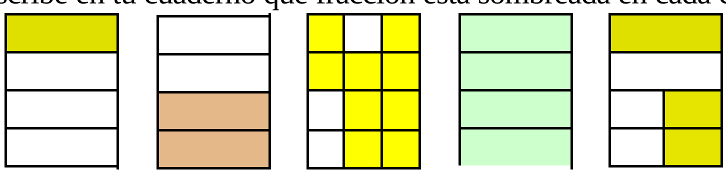
Consigna:

A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

a) Resuelve los problemas propuestos.
b) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
c) Identifica diferencias y semejanzas entre los distintos problemas.
d) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
e) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
f) Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

1. Escribe en tu cuaderno qué fracción está sombreada en cada caso



2. En una granja, de cada 10 animales, 5 son aves, 3 son vacas y 2, ovejas.
   - Representa, con un gráfico, la fracción de cada tipo de animales.
   - ¿Qué fracción representan las vacas y las ovejas juntas?
   - De cada 5 aves, 3 son gallinas, ¿Qué fracción del total de animales son gallinas?

3. Copia al lado de cada fracción cómo se lee:

$$\frac{3}{5} \qquad \frac{5}{8} \qquad \frac{4}{3} \qquad \frac{2}{7} \qquad \frac{7}{11} \qquad \frac{10}{8}$$

4. Entre cinco personas compran una bolsa de naranjas de 4 kg por 490 pts.
   - ¿Qué peso, en kilos, corresponde a cada persona?
   - ¿Cuánto dinero tiene que pagar cada una?
   - Expresa cada resultado en forma de fracción y calcula su valor

5. De las 25 personas de la clase de Laura 3/5 son niñas. ¿Cuántos niños hay?
6. Laura ha recorrido los 2/3 del trayecto de su casa al colegio, que mide 570 m.

Roberto ha recorrido también los dos tercios del suyo, que es de 420 m. ¿Han recorrido Laura y Roberto la misma cantidad de metros? ¿Y la misma fracción de su camino respectivo?

7. De la superficie total de España (504.000 km^2, aproximadamente), los dos tercios son de paisaje llano. ¿Cuántos kilómetros cuadrados representa esta fracción? ¿Cuánta superficie montañosa hay en España?

8. Escribe y representa con dibujos: a) Dos fracciones iguales a la unidad; b) Dos fracciones menores que la unidad, c) Dos fracciones mayores que la unidad.

9. Las fracciones 3/4, 2/5, 3/8, y 8/10 son menores que la unidad. Compruébalo hallando sus expresiones decimales. Haz lo mismo con 7/5, 6/4, 3/2 y 13/10, que son mayores que la unidad.

10. Comprueba que las fracciones 6/5 y 12/10 son equivalentes. Halla ahora el valor decimal de cada una. ¿Qué observas? Haz lo mismo con las fracciones 54/3 y 8/6.

11. Escribe una fracción simplificada de 16/12, 4/8, 10/15, 8/10 y 12/21.

12. Encuentra fracciones equivalentes a 6/18 con estas condiciones:

Numerador	3		4	1	
Denominador		6			5

¿Puedes llenar todas las casillas¿ ¿Por qué?

13. Ordena de menor a mayor:
a) 6/2, 6/10, 6/4, 6/8; b) 13/4, 9/4, 5/4, 8/4; c) 7/5, 8/9, 12/5, 6/9; d) 5/4, 7/5, 3/2, 7/8.

14. Calcula: a) 3/5 de 1.500 euros; b) 7/9 de 9.000 kilos; c) 4/3 de 175'4 metros; 6/10 de 3.854 personas.

15. Comprueba gráficamente, con el producto cruzado de los términos y hallando el valor decimal, cuáles de estos pares de fracciones son equivalentes:
    a) 3/4 y 1/5; b) 6/4 y 9/6; c) 5/10 y 4/8; d) 7/2 y 28/8

16. En el pueblo de Sergio, los 5/8 de toda la producción agrícola corresponden a las frutas. Las manzanas suponen los 3/8 de la producción total. ¿Qué fracción corresponde al resto de las frutas.

17. Una fuente echa 5/4 litros de agua cada segundo. ¿Cuántos litros arroja en un minuto?

18. El padre de Sergio ha hecho un mural rectangular de cerámica que mide 1/2 metro de base y 3/4 de metro de altura. ¿Qué superficie tiene el mural?

B: Conocimientos Matemáticos

1. FRACCIONES Y RAZONES

Nos encontramos con frecuencia situaciones en las que es preciso dividir un todo en partes, repartir un conjunto de objetos en partes iguales o medir una cierta cantidad de una magnitud que no es múltiplo de la unidad de medida. Para resolver estas situaciones prácticas, tenemos necesidad de expresar el cociente de dos números naturales (en los casos en que no es un número natural) . Ello nos lleva a la idea de fracción y tras un proceso de abstracción a la introducción de los números racionales. En este tema comenzamos analizando las situaciones prácticas que nos llevan a la idea de fracción y estudiamos los números racionales y sus operaciones.

1.1. Situaciones de uso de fracciones y razones

1. Situaciones de reparto

1.1. Partición de un todo

Se trata de situaciones en las que un todo constituido por uno o más objetos se divide en partes iguales y se toman o consideran algunas de esas partes. Cuando decimos que una parte es *a/b* del total queremos decir que el total se ha dividido en *b* partes iguales y que el trozo al que hacemos referencia está formado por un número *a* de dichas partes. Si el todo está compuesto por un número de elementos iguales, que a su vez es múltiplo de *b*, la partición consiste en formar *b* subconjuntos disjuntos del mismo número de elementos y tomar *a* de ellos. El todo puede ser continuo o discreto.

> Ejemplo (todo continuo): Si repartimos una tarta entre tres personas decimos que cada una de ellas recibe 1/3.
>
> Ejemplo (todo discreto): En una urna hay 5 bolas blancas y 3 negras. Decimos que la probabilidad de obtener una bola blanca es 5/8, porque los casos favorables son 5 de los 8 posibles.

1.2. Reparto equitativo en las que el número de objetos a repartir no es múltiplo del número de individuos entre los que se efectúa el reparto.

Los objetos pueden ser divididos en partes sin que pierdan sus propiedades básicas En este caso la existencia de un resto obliga a dividir en partes iguales la unidad de reparto para poder seguir repartiendo el resto de forma igualitaria entre los individuos. Por tanto, si cada individuo recibe *a/b* objetos significa que cada uno de los objetos a repartir ha sido dividido en *b* partes iguales y se ha entregado *a* de ellas a cada individuo.

> Ejemplo: Se desea repartir, de manera equitativa, 5 tartas entre 8 niños. Cada tarta se divide en ocho porciones iguales y se dan 5 de ellas a cada niño. El resultado del reparto se expresa con la escritura, 5/8.

1.3. Reparto proporcional de una cierta cantidad en partes que guardan una cierta relación.

En las sociedades jerarquizadas existen repartos o contribuciones que no son equitativos, sino que los individuos reciben o contribuyen en función de su jerarquía social y económica. La relación entre las cantidades repartidas puede ser de tipo aditivo o de tipo multiplicativo según que lo que se mantenga constante sea la diferencia entre las cantidades a repartir o el cociente.

- Si se efectúa un reparto en que uno de los individuos tiene que recibir 3 unidades más que otro (relación aditiva), si el segundo recibe 2 unidades, el primero recibirá 5; y si el segundo recibe 20 unidades, el primero recibirá 23.
- Si en un reparto un individuo recibe 3 veces más que otro (relación multiplicativa), recibirá 6 unidades si el segundo recibe 2, o 60 unidades si el segundo recibe 20. En este caso, decimos que el reparto se hace en la *razón 3 a 1.* Si el reparto se hace en la razón *a:b* o *a* ¾ *b* (que son las dos maneras de denotar las relaciones multiplicativas), por cada *a* objetos o cantidades que reciba el primer individuo el segundo debe recibir *b* objetos o cantidades.

  Ejemplo: Este tipo de reparto se usa en el muestreo proporcional. Por ejemplo, si en una población electoral la proporción de jóvenes es el 30% del total de votantes, al elegir una muestra de 1000 personas se incluirá en la misma 300 jóvenes.

2. Situaciones de medida

2.1. Por fraccionamiento de la unidad

En estas situaciones existe una cantidad de magnitud a medir que no equivale a la unidad o alguno de sus múltiplos. Para precisar más la medida se divide la unidad en partes iguales y si una cantidad de magnitud mide *a/b* unidades quiere decir que dividiendo la unidad en *b* partes iguales la cantidad de magnitud a medir equivale a un número *a* de dichas partes.

Ejemplo: Cuando decimos que un botellín de coca cola tiene 250/1000 litros.

2.2. Por commensurabilidad

Situaciones de medida en las que se comparan dos cantidades de una magnitud, estableciendo cuántas veces tiene que ser repetida cada una de ellas para obtener dos cantidades iguales.

En este caso, dadas dos cantidades de magnitud A y B (por ejemplo, dos varillas de longitudes A y B), decimos que están en la razón $a : b$ si repitiendo *b* veces la cantidad de magnitud A y *a* veces la cantidad de magnitud B, se obtienen dos cantidades de magnitud iguales, es decir, $b\text{A} = a\text{B}$. Si la cantidad de magnitud B se toma como unidad de medida se dice entonces que $a : b$ es la medida de A respecto de la unidad B. Este proceso de medida se llama "medida por conmensurabilidad" (medida común).

Los pares de números naturales $a : b$, o separadas por un guión a —— b, que aparecen en este segundo tipo de situaciones suelen recibir el nombre de razones y tienen todos ellos la particularidad de que si dos cantidades de magnitud A y B están en la razón $a : b$ se cumple que $b\text{A}=a\text{B}$. Al primer número del par se le llama "antecedente" o primer término de la razón y al segundo "consecuente" o segundo término de la razón[1].

[1] En el caso particular de que el segundo término de una razón sea 100, a dicha razón se le llama porcentaje. Decir que una cantidad de magnitud A es el "35 por ciento", 35%, de otra B, equivale a decir que 100A = 35B.

Las situaciones de comparación multiplicativa de los cardinales de dos conjuntos es un caso particular de medida por conmensurabilidad en el que las magnitudes son discretas.

En algunas ocasiones se establecen relaciones multiplicativas entre dos conjuntos con efectos de comparación, o se comparan cantidades de diferentes magnitudes discretas. En este uso se supone que los dos conjuntos son partes de un conjunto global y se comparan las partes entre sí, y no las partes con el todo.

Ejemplo: Cuando decimos que en una Facultad hay 3 chicos por cada 7 chicas. La razón entre el número de chicos y chicas es 3/7.

La similitud con la conmensurabilidad se ve teniendo en cuenta que si tomamos 7 grupos de 3 chicos obtenemos la misma cantidad de personas que si tomados 3 grupos de 7 chicas. En ambos casos se obtiene 21 personas.

3. Situaciones de trueque, en las que dos individuos intercambian mercancías de distintos tipos.

Un trueque se efectúa en la razón $a: b$ si por cada a objetos de un tipo que el primer individuo le entrega al segundo, este último le entrega al primero b objetos de otro tipo.

Ejemplo: Cuando compramos una bolsa de naranjas de 3 kilos por 4 euros. En este caso podemos decir que el trueque es 4: 3 euros el kilo o, alternativamente que el precio unitario del kilo de naranjas es 4/3 de euro.

4. Situaciones de transformación

En el estudio del cambio de un objeto, un conjunto de objetos o una cantidad de magnitud, cuando se compara un estado actual con otro pasado o futuro también se utilizan fracciones. En este caso la fracción tiene un uso como función u operador que se aplica sobre una cantidad inicial para hallar una cantidad final.

Ejemplo: Cuando se dice que el crecimiento de la población es del 10 por ciento o que el precio de unas acciones se ha reducido a los 3/4 de su valor.

5. Situaciones de división no entera

En el contexto algebraico, la solución de la ecuación $a = bx$, con a y b enteros y cuando b no es un divisor de a y distinto de 0, se expresa mediante la fracción a/b, dejando indicado el cociente entre los números a y b.

En el proceso de solución de las situaciones anteriores puede haber una fase (con frecuencia implícita) en la que las cantidades que aparecen se reducen a sus respectivas medidas (números enteros). Con ello se pasa de una situación empírica a otra formal (algebraica) en la que la fracción expresa el cociente indicado de los números correspondientes.

Los distintos tipos de situaciones de uso de las fracciones y razones que hemos descrito proporcionan sentidos (o significados pragmáticos) diferentes de estos objetos matemáticos, poniendo en juego acciones e informaciones contextuales diferentes. El objeto matemático "número racional", que se presenta en la siguiente sección, debe ser abstraído de toda esta variedad de situaciones y operaciones concretas.

Ejercicio

1. Clasifica los problemas incluidos en la parte A (incluidos en libros de primaria) según los tipos de situaciones descritas en esta sección.

1.2. Distinción entre fracciones y razones

En los ejemplos que hemos introducido las razones utilizadas son siempre entre números enteros y se podía pensar que la razón es equivalente a una fracción. Sin embargo, en algunas situaciones el uso que se hace del término razón es más amplio que el de fracción, por lo que algunos autores diferencian entre estos dos términos. Estas situaciones son las siguientes:

- Cuando se comparan los tamaños de colecciones de objetos de naturaleza diferente, y no tiene sentido pensar en un conjunto global que los contenga. Por ejemplo cuando se dice que en una ciudad hay 2 automóviles por cada 5 habitantes.

- Las razones se pueden expresar mediante símbolos diferentes de fracciones: 4: 7, o 4 → 7; el símbolo de la fecha indica bien el aspecto de correspondencia de una razón, como medio de comparar cantidades.

- Las razones pueden tener un cero como segunda componente. En una bolsa la razón de bolas rojas a verdes puede ser de 10 a 0, si no hay ninguna verde. En las fracciones el denominador siembre debe ser distinto de cero.

2. EQUIVALENCIA DE FRACCIONES. NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS

En los problemas que hemos descrito, fracciones diferentes, por ejemplo, 2/3 y 4/6, producen el mismo resultado. En efecto, en las dos siguientes situaciones de expresión de una parte de un todo discreto:

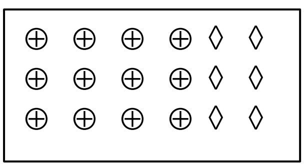
"De los 18 alumnos de la clase, los 2/3 son chicas".

"De los 18 alumnos de la clase los 4/6 son chicas",

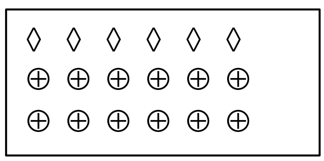
el número de chicas es el mismo, 12. En realidad, disponemos de infinitas fracciones para comparar el número de chicas 12 con el total de la clase 18:

2/3, 4/6, 6/9, 8/12, etc. Decimos que estas fracciones son equivalentes entre sí.

Esta situación se suele ilustrar en la escuela primaria mediante gráficos como el siguiente:



4/6 de 18 chicas = 12 chicas



2/3 de 18 chicas = 12 chicas

Fracciones equivalentes. Caracterización:

Dos fracciones a/b, c/d son equivalentes si se cumple "la igualdad de los productos cruzados", o sea: a.d = b.c.

En efecto, si a.d = b.c, dividiendo ambos miembros por b.d y simplificando se obtiene,

$$\frac{a.d}{b.d} = \frac{b.c}{b.d}; \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Y viceversa, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ multiplicando ambos miembros por b.d y simplificando se obtiene que a.d = b.c

Esta relación cumple las tres condiciones exigidas a las llamadas relaciones de equivalencia, o sea:

- Reflexiva: toda fracción es equivalente a sí misma;
- Simétrica: si una fracción x es equivalente a otra fracción y e y es equivalente a x, entonces x e y son la misma fracción;
- Transitiva: si una fracción x es equivalente a otra fracción y e y es equivalente a otra fracción z, entonces x y z son equivalentes

Es importante destacar que en la mayor parte de las situaciones, las fracciones equivalentes se usan indistintamente. Intuitivamente vemos que dos fracciones equivalentes, tales como 2/3 y 4/6 se refieren a una misma cantidad si se trata de una magnitud o a una misma razón si se trata de una comparación. Lo mismo ocurre con todas las fracciones equivalentes a la dada: 3/9, 20/30, 200/300, etc. Esta idea intuitiva se formaliza introduciendo los números racionales.

Número racional

El conjunto de las fracciones queda dividido en "clases de equivalencia", cada una de ellas formada por todas las fracciones equivalentes entre sí. Cada una de las clases se dice que es un *número racional*; y el conjunto de todas las clases, el conjunto de los números racionales Q (incluyendo los números positivos y negativos, como se explica en el capítulo 6). Esta descripción abstracta se puede interpretar desde un punto de vista más intuitivo:

El número racional [2/3] = {2/3, 4/6,...} lo identificamos con la fracción 2/3 cuando es usada como representante de cualquier otro miembro de la clase de fracciones equivalentes a 2/3.

Las distintas fracciones de una misma clase de fracciones equivalentes son todas ellas diferentes unas de otras. Cuando se escribe:

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15}$$

estas tres fracciones, en tanto que tales fracciones, no son iguales entre sí, sino equivalentes (se puede sustituir una por otra). Pero todas estas fracciones representan la misma clase de equivalencia, el mismo número racional. Por ello usamos el símbolo de igualdad.

Algunos textos y documentos curriculares usan la expresión "número fraccionario" para referirse al número racional.

La equivalencia de fracciones y razones es la propiedad que justifica varias técnicas importantes de manipulación de racionales. Una de ellas es la técnica de 'simplificación de fracciones' que nos permite pasar de una fracción a la fracción irreducible[2] equivalente a ella y que consiste en dividir numerador y denominador por el máximo común divisor de ambos números. Otra técnica es la de 'reducir a común denominador' o 'reducir a común numerador' varias fracciones, técnica consistente en elegir facciones equivalentes a las dadas, todas ellas con el mismo denominador o con el mismo numerador, para lo cual hay que buscar el mínimo común múltiplo de los denominadores o numeradores.

La equivalencia de razones permite establecer la *'regla de tres'*, técnica que permite encontrar uno de los términos de una proporción conocidos los otros tres y que se basa en el hecho ya comentado de que en una igualdad entre dos razones (proporción) los productos en cruz son iguales. Si el término desconocido es un extremo se obtendrá multiplicando los términos medios de la proporción y dividiendo el resultado por el otro extremo. Si el término desconocido es uno de los términos medios de la proporción se obtendrá multiplicando los extremos y dividiendo el resultado por el término medio conocido.

Fracciones irreducibles:

Cuando trabajamos con un número racional, conviene designarle por la fracción más simple posible, como por ejemplo, 3/5 en el ejemplo anterior. Estas fracciones que no se pueden simplificar (dividiendo numerador y denominador por el mismo número) se llaman *fracciones irreducibles*.

Números racionales particulares

- Todo *número entero* es un racional, pues cualquier entero se puede escribir en la forma de fracción:
  - 0 = 0/1 = 0/2 =...
  - 1 = 1/1 = 2/2 =...
  - 2 = 4/2 = 6/3 =...

- Todo *número decimal* es un racional, pues todo número decimal se puede escribir bajo la forma de una fracción cuyo denominador es una potencia de diez.

  1’2 = 12/10 (= 6/5)

  34’56 = 3456/100

En consecuencia, el conjunto de los enteros y el de los decimales son subconjuntos de Q, el conjunto de los números racionales.

Ejercicios

2 ¿Puedes simplificar la fracción 1/3? ¿Y 3/5? ¿Por qué? ¿Y amplificarlas?

3. Escribe tres fracciones equivalentes a cada una de éstas: 2/5; 3/2; 10/4.

[2] Se llama fracción irreducible a una fracción en la que numerador y denominador son primos entre sí, es decir, no tienen ningún factor primo común.

4. Entre tres amigos se han repartido 360 cromos de la siguiente manera: al primero 3/9, al segundo 4/12 y al tercero 1/3. ¿Cuántos cromos le corresponde a cada uno? ¿Qué relación hay entre las tres fracciones?

5. ¿Cuál de las siguientes fracciones es irreducible? 10/21; 15/24; 220/1617

6. Reduce la fracción 12/20, ¿por qué número debes dividir numerador y denominador? ¿ y para reducir la fracción 28/42? ¿Puedes encontrar una regla general para reducir una fracción?

7. Demuestra que 8/29 =6/15.

3. PRIMERAS PROPIEDADES DEL NÚMERO RACIONAL POSITIVO

El concepto de *número racional positivo* se ha construido a lo largo de varios miles de años y durante muchos siglos, su definición estuvo ligada a contextos concretos de medida y reparto. En estas condiciones, surgieron los conceptos de fracción y razón que inicialmente fueron conceptos independientes. A partir de ellos, se sintetizó, posteriormente, el concepto de número racional positivo y, más tarde, el de número racional.

Puesto que detrás del concepto de número racional están los conceptos de fracción y razón y las situaciones de reparto y medida que les dan sentido, justificaremos la compatibilidad de sus propiedades con las referidas situaciones.

En lo que sigue, representaremos los racionales positivos con la notación *a/b*, o, $\frac{a}{b}$, salvo cuando tengan un significado específico como razones, pues entonces utilizaremos la notación *a : b* o a — b.

1. *Si a ¹ b, los números racionales representados por las fracciones a/b y b/a son distintos.*

Esta propiedad es evidente en cualquiera de las situaciones. Se dice que los racionales *a/b* y *b/a* son inversos el uno del otro.

<u>Ejemplo</u>: La cantidad de magnitud que mide *a/b* unidades es distinta de una cantidad de magnitud que mida *b/a* unidades.

<u>Ejemplo</u>: Si una cantidad se reparte proporcionalmente entre dos individuos el resultado del reparto es distinto según que éste se haga en la razón *a : b,* o en la razón *b : a,* etc.

2. El denominador de una fracción no puede ser cero, el numerador si puede serlo.

El denominador de una fracción no puede ser cero porque no tiene sentido fraccionar la unidad de medida en cero partes o repartir entre cero individuos.

En cambio, un numerador cero indica que no se toma ninguna de las partes en que se ha dividido la unidad, o que en la cantidad de magnitud a medir no cabe ninguna de dichas partes, lo que sí es posible.

Nota: Sin embargo, en un reparto proporcional tienen sentido tanto la razón $0 : b$ como la $a : 0$; en los dos casos significa que una de las personas lo recibe todo y la otra no recibe nada. Pero en este caso no hablamos de número racional.

3. El racional 0 es el que tiene como representante cualquier fracción de la forma 0/b

Si en la medida, bien por fraccionamiento de la unidad, bien por conmensurabilidad, de la cantidad de magnitud de un objeto, se obtiene un racional 0/b eso significa que ese objeto no tiene cantidad de magnitud, lo que en términos de números naturales se expresa diciendo que la cantidad de magnitud es 0.

4. Las fracciones con numerador igual al denominador son equivalentes y representan al número racional 1

Esta propiedad se justifica porque si una cantidad de magnitud mide *b/b* unidades significa que la unidad se divide en *b* partes y se toman esas *b* partes y esto equivale a la unidad.

En las situaciones de reparto proporcional también podemos decir que repartir en la razón 4 : 4 equivale a repartir en la razón 1:1.

5. El numerador de una fracción puede ser mayor, igual o menor que el denominador y *en consecuencia hay números racionales mayores, iguales o menores que la unidad*.

- Si el número racional lo interpretamos como una razón no hay ningún problema, tanto sentido tiene la razón 7 : 3 como la 3 : 7.
- Puede ser más difícil de justificar en las situaciones de partición de un todo, pues si, por ejemplo, descomponemos un todo en 3 partes, el racional 7/3 indica que se han tomado 7 de dichas partes y ¿de dónde salen las 7 partes que se toman si inicialmente sólo se dispone de 3?
- En las situaciones de medida por fraccionamiento de la unidad 7/3 indica que la cantidad de magnitud de un objeto equivale a 7 terceras partes de la unidad de medida. En la práctica, primero contamos cuántas veces cabe la unidad entera en la cantidad de magnitud a medir y utilizamos el fraccionamiento de la unidad para dar la medida del resto. En ese caso en vez del racional 7/3 aparece como resultado de la medida el 'número mixto' $2\frac{1}{3}$.

A las fracciones del tipo 7/3 se las ha llamado, tradicionalmente, 'fracciones impropias', porque se consideraba que la forma correcta de expresar la medida correspondiente era convirtiéndolas en un número mixto[3].

La técnica de convertir las fracciones impropias en números mixtos consiste en efectuar la división entera entre el numerador y el denominador. El cociente obtenido será la parte entera del número mixto y el resto será el numerador de la nueva fracción, que deja de ser una fracción impropia.

6. *Los fracciones de denominador 1 representan a los números naturales* que son, por tanto un subconjunto de los racionales.

- En la situación de medida por fraccionamiento de la unidad, si una cantidad de magnitud mide, por ejemplo, 4/1 unidades significa que la unidad no se ha descompuesto en partes y, por lo tanto, equivale a decir que mide 4 unidades.

[3] Al número expresado como suma de un número natural a y una fracción b/c se le llama 'número mixto' y se representa por $a\frac{b}{c}$ omitiendo el símbolo de la suma.

- En el caso de medida por conmensurabilidad, si la cantidad de magnitud A mide 7/1 unidades, significa que A es igual a 7 veces la unidad, lo que también permite identificar 7/1 con el número natural 7.

Ejercicios

8. Explica por qué 0/5 = 0. Explica por qué 0/0 no está definido.
9. Busca un contraejemplo numérico de que x/(x+y) puede ser distinto a 1/(1+y).
10. Encuentra m, para que m/6=10/15.

4. OPERACIONES CON FRACCIONES Y NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS

Puesto que un número racional viene representado por una infinidad de fracciones equivalentes, para operar con dos números racionales *x* e *y*, basta operar con alguna de las fracciones que representan a *x* y a *y*. La clase de equivalencia representada por el resultado de la operación es un número racional, resultado de operar con los números racionales *x* e *y*. Usualmente lo que hacemos es elegir la representación más simple posible, es decir la fracción irreducible que representa a ese número racional. En consecuencia definimos las operaciones con fracciones.

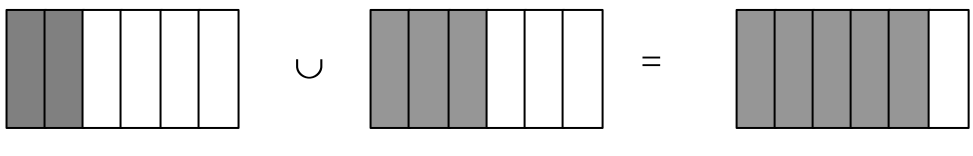
4.1. Suma y diferencia de fracciones y números racionales positivos

La suma y diferencia de fracciones se justifica a partir del mismo tipo de situaciones que daban sentido a la suma y diferencia de naturales, es decir, situaciones de parte-todo, de reunión, de transformación o de comparación. Por tanto, el sentido de la suma y diferencia no cambia, cambian únicamente las cantidades que intervienen, que ahora son medidas o partes de un todo, mientras que antes eran cardinales u ordinales.

La suma de dos fracciones de igual denominador se define como el resultado de sumar los numeradores y dejar invariante el denominador,

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

Ejemplo: En una reunión, 2/6 de las personas son hombres y 3/6 son mujeres, ¿Qué fracción de los presentes son adultos?



La diferencia de fracciones de igual denominador es el resultado de restar los numeradores y mantener el mismo denominador.

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Por supuesto, para que una diferencia de fracciones positivas sea posible tiene que ser el primer numerador mayor o igual que el segundo.

Suma de fracciones de distinto denominador

Si tienen distinto denominador, se reducen a común denominador y se aplican las definiciones anteriores (en este caso lo que se está sumando o restando son los racionales representados por dichas fracciones). En la práctica se habla de suma de fracciones de distinto denominador.

Estas definiciones se justifican bien a partir de situaciones de medida por fraccionamiento de la unidad. Por ejemplo, si yo tengo una cantidad de magnitud A que mide 3/5 unidades y otra B que mide 8/5 la unión de las dos cantidades de magnitud será una nueva cantidad de magnitud que medirá 11/5.

Suma y diferencia de números racionales

La suma o diferencia de dos racionales será el racional definido por la suma o diferencia de dos fracciones representantes de cada uno de los dos racionales que se desea sumar o restar.

Propiedades:

De las propiedades de la suma de fracciones, se deducen las siguientes propiedades para la adición de números racionales:

- Es una operación binaria e interna en el conjunto Q;
- Es asociativa;
- Es conmutativa;
- Tiene elemento neutro (el 0);
- Todo elemento tiene simétrico (el opuesto).

Ejercicios

11. En Córdoba, durante el año pasado, las 4/5 partes de los días la temperatura superó los 25ºC, mientras que en León sólo ocurrió ésto una sexta parte de los días, aproximadamente, ¿Cuántos días hubo más de 25ºC en Córdoba? ¿Y en León?

12. Ilustra las siguientes sumas y diferencias de fracciones usando el modelo de áreas: 2/5+3/8; 4/7-2/11.

13. Supón que tienes que explicar a un niño los pasos a dar para sumar dos fracciones. Escribe una lista de todos estos pasos. Dibuja un organigrama que el niño pueda seguir para resolver la tarea con éxito.

14. Si el precio de un producto sube de 3 1/3 de euro el kilo a 4 1/8 de euro. ¿En cuántos euros se incrementa el precio? ¿Qué tanto por ciento de subida supone sobre el precio inicial?

4.2. Producto y cociente de fracciones y números racionales positivos

A diferencia de lo que sucede en la suma, el sentido del producto de racionales cambia respecto al producto de naturales. En estos últimos un producto significa, ante todo, una suma repetida; sin embargo, en el caso de las fracciones y racionales no es posible interpretar el producto $\frac{3}{4}x\frac{1}{5}$ como el resultado de sumar 1/5 repetidas veces porque el número de veces no puede ser fraccionario.

La situación que permite entender mejor el sentido del producto de racionales es la de partición de un todo plural, un todo que se compone de una colección de objetos homogéneos. Supongamos un conjunto de 70 lápices iguales. Obtener los 3/5 del total significa descomponer el conjunto en 5 subconjuntos de 14 lápices cada uno y coger 3 de dichos subconjuntos. En total, obtendremos 42 lápices. Si ahora tomamos los 4/7 de esa última cantidad, eso significa descomponer el conjunto de 42 lápices en 7 subconjuntos de 6 lápices cada uno y tomar 4 de esos subconjuntos. El resultado final son 24 lápices. Pero si calculamos los 12/35 de la cantidad inicial de lápices se obtienen también 24 lápices. Esto quiere decir que calcular los 4/7 de los 3/5 de 70 es lo mismo que calcular los 12/35 de 70.

En general, se comprueba que *a/b* de *c/d* de cualquier cantidad es lo mismo que $\frac{ac}{bd}$ de esa misma cantidad. Por tanto, el producto de dos fracciones se define de la manera siguiente:

$$\frac{a}{b}\text{x}\frac{c}{d}=\frac{a\text{x}c}{b\text{x}d}$$

y su sentido es el de una *fracción de fracción*.

El producto de dos racionales será el racional definido por el producto de dos fracciones representantes de cada uno de los dos racionales que se desea multiplicar.

El cociente de fracciones y racionales tampoco tiene el sentido de reparto o resta reiterada de la división entre naturales, sino que es, simplemente la operación inversa del producto.

Se define el cociente de fracciones como el producto de la primera fracción por el inverso de la segunda:

$$\frac{a}{c}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\text{x}\frac{d}{c}=\frac{a\text{x}d}{b\text{x}c}$$

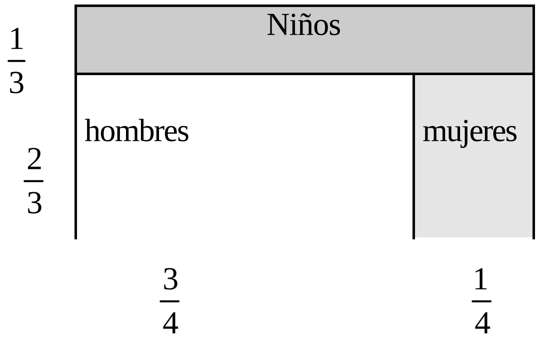
El cociente de dos racionales será el racional definido por el cociente de dos fracciones representantes de cada uno de los dos racionales que se desea dividir.

Ejemplo:

En una reunión hay 24 personas, los 2/3 de los presentes son adultos y ¾ de los adultos son hombres.

a) ¿Cuántas personas adultas hay en la reunión?
b) ¿Cuántos niños hay en la reunión?
c) ¿Qué fracción son los hombres respecto del total de personas?

La representación gráfica mediante áreas de rectángulos permite expresar adecuadamente la situación:



Ejercicios

15. Si 1/3 de la cosecha de aceituna se estropea por causa de una tormenta y 1/10 de lo que quedó se perdió por causa de una plaga, ¿qué fracción de la cosecha pudo ser utilizada?

16. En un festival los 2/3 son adultos y de ellos los 3/5 son hombres. Hay 20 niños y niñas más que mujeres. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay en el festival?

17. Inventa un problema cuya solución sea 5: 1/10.

18. Cuando lanzamos una pelota desde una cierta altura, rebota hasta ¼ de la altura a que se lanzó. Si después de tres botes la altura alcanzada es 10 cm ¿A qué altura inicial se lanzó la pelota?

4.3. Orden de fracciones y racionales positivos

Para comparar entre sí dos números racionales comparemos dos fracciones representantes de cada uno de los dos números racionales que se desea comparar.

Dadas dos fracciones con el mismo denominador es menor la que tiene menor numerador; si las fracciones tienen igual numerador será menor la que tenga el mayor denominador; si no tienen iguales los numeradores ni los denominadores se reduce a común numerador o denominador y se aplica una de las reglas anteriores.

Ejemplo: Si una cantidad de magnitud mide 3/11 unidades será menor que la cantidad de magnitud que mide 7/11 unidades y también menor que la que mide 3/5 unidades. También se puede ver que si un individuo recibe en un reparto en la razón 3 : 11 recibirá menos que si se repartiera en la razón 7 : 11.

Una propiedad muy importante del orden de racionales es que dados dos racionales, por muy próximos que los elijamos siempre podemos encontrar tantos racionales como queramos que sean mayores que uno de ellos y menores que el otro. Esta propiedad se suele enunciar diciendo que entre dos números racionales distintos existen siempre infinitos racionales. También se dice que el conjunto de los números racionales es un conjunto *denso*. Todo esto implica que en los números racionales, a diferencia de lo que sucede en los naturales, deja de tener sentido el concepto de número 'siguiente' o 'anterior' ya que nunca podremos encontrar dos racionales que no tengan otros racionales entre ellos.

La definición algebraica de orden en Q requiere previamente decir cuando consideramos que un racional es positivo. Esto se puede hacer del siguiente modo:

- El racional [*m/n*] es positivo si $m.n \in N$

Después de esto podemos decir que el racional *x* es menor que *y*, $x<y$, si la diferencia *y*-*x* es positiva.

Ejemplos:

- Para probar que 3/8 < 5/8 basta comparar los numeradores
- Para probar que 4/11 < 3/8, se reemplazan ambas fracciones por otras equivalentes con iguales denominadores, y se comparan los numeradores.

En general, si a, b, c, d son enteros y b y d son positivos, entonces,
a/b < c/d, sí y sólo sí a.d < d.c

Propiedades de la ordenación en Q:

Las siguientes propiedades son consecuencias de la definición de número racional positivo, de la definición de relación de orden y del hecho de que los racionales positivos son cerrados respecto de la multiplicación y adición.

Tricotomía: Si r y s con números racionales, entonces una de las siguientes relaciones es verdadera: r < s, r > s, o r = s.

Transitividad: Para números racionales r, s, y t, si r < s y s < t, entonces r < t.

Aditividad: Para números racionales r, s, y t, si r < s, entonces r +t < s + t.

Mutiplicatividad: Para números racionales r, s y t:

- Si r < s y t > 0, entonces, t.r < t.s:
- Si r < s y t < 0, entonces, t.r > t.s

Ejercicios:

10. Aplicar las propiedades anteriores para resolver la siguiente desigualdad:
-2.x – 2/3 < 4/5.

20. Encontrar un número racional entre 6/7 y 8/9.

21. Si x e y son números racionales y x > y, ¿Cuáles de las siguientes condiciones son ciertas?

- 1/x > 1/y
- 1/x < 1/y

5. TÉCNICAS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE FRACCIONES

El siguiente ejemplo, tomado de Krause (1991), muestra el uso de varias técnicas para resolver problemas que ponen en juego las operaciones con números racionales. Las diversas técnicas ponen en juego recursos diferentes (aritméticos, algebraicos, geométricos y combinatorios)

Enunciado:

La población de un cierto estado es 5/8 urbana y 3/8 rural. Si ¼ de la urbana y 1/6 de la rural es menor de 18 años, ¿qué fracción de la población del estado es menor de 18 años?

Solución 1 (Aritmética):

Comenzamos suponiendo que la población total del estado es un número particular de personas. Dicho número se debe elegir teniendo en cuenta los denominadores de las fracciones que intervienen en el enunciado, de manera que al ser aplicadas a la cantidad supuesta los cocientes correspondientes sean exactos. En este caso, el producto de los denominadores 8, 6 y 4, esto es, 192 (millones, por ejemplo) es suficiente.

Según esto, la población urbana será 120 millones de personas, 30 de los cuales son menores de 18. La población rural es de 72 millones de personas, y hay 12 menores de 18 años. Por tanto, hay 30 + 12 = 42 millones menores de 18 años.

La fracción pedida será: 42/192, o bien, simplificando, 7/32.

Solución 2 (Algebraica):

Sea n la población total. Entonces,

La población urbana es: $\frac{5}{8}.n$

La población urbana menor de 18 años: $¼ . \frac{5}{8}.n = \frac{5}{32}.n$

La rural es: $\frac{3}{8}.n$

La rural menor de 18 es:

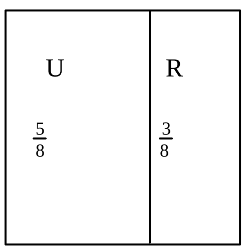
$$\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8}.n = \frac{3}{48}.n$$

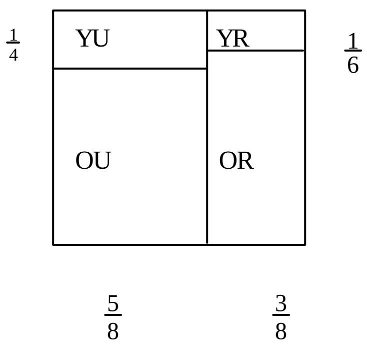
La población total menor de 18 años es: $\frac{5}{32}n + \frac{3}{48}n = \left(\frac{5}{32} + \frac{3}{48}\right)n = \frac{7}{32}n$

Solución 3 (Geométrica):

Tomamos el cuadrado unidad para representar la población. Dividámoslo, según se muestra en la figura, para representar a la población rural (R) y urbana (U). Y a continuación a la población menor de 18 años (Y) y mayor (O). Obtenemos cuatro regiones. La fracción pedida es la suma de las áreas que interesan: YU y YR:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8} = \frac{5}{32} + \frac{3}{48} = \frac{7}{32}$$

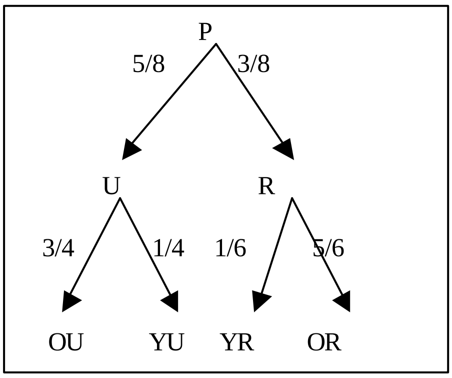




Solución 4 (Diagrama en árbol)

La comparación de tamaños entre varias poblaciones y subpoblaciones en este problema, se puede representar esquemáticamente por un diagrama de árbol, del tipo que aparece en la figura. La regla principal para usar este diagrama consiste en "multiplicar hacia abajo en las ramas". Por ejemplo, para encontrar qué fracción de la población total (P) es menor de 18 años y rural (YR), multiplicar los números que aparecen en las ramas que llevan de P a YR: 3/8 . 1/6 = 1/16.

La regla se puede justificar si nos referimos a la figura utilizada en la solución geométrica.



Ejercicios:

Resuelve los siguientes problemas aplicando los cuatro métodos que hemos descrito en el ejemplo anterior.

22. Al examen de junio de matemáticas se presentan 3 de cada 5 alumnos matriculados, y por cada 5 alumnos que aprueban hay 2 que suspenden. ¿Qué fracción de a los alumnos matriculados aprueban en junio?

23. En una planta depuradora de aguas residuales, el tratamiento del agua se realiza en tres etapas. En una primera se quitan los 9/10 de los fosfatos. En la segunda se quitan los ¾de los que quedan. Y en la tercera, se quita ½de los que aún lleva el agua. ¿Qué fracción de fosfatos se quitan en total del agua?

24. Supongamos que 2/5 de la ginebra es alcohol, que 1/6 del vermouth es alcohol, y que un martini se hace con 5 partes de ginebra y 1 parte de vermouth. ¿Qué fracción de alcohol lleva un martini?

6. TALLER DE MATEMÁTICAS

1. En la prensa diaria busca algunas situaciones en que aparezcan fracciones y razones. Para cada una de ellas, identifica el tipo de situación problemática presentada, entre las descritas en la sección 1.

2. En las siguientes situaciones identifica los distintos de usos de las fracciones que se ponen en juego. Expresa estos enunciados y la solución utilizando algún tipo de representación gráfica.

a) En una clase hay dos tercios de chicas. ¿Si hay catorce chicas en la clase? ¿Cuál es el número total de alumnos?
b) Si Jorge pedalea a una razón de 8 km por hora, al cabo de 45 minutos ¿A qué distancia está de su casa?
c) Un terreno mide 200 metros cuadrados. ¿Cuánto mide las 5/8 partes del terreno?
d) La tasa esperada de crecimiento anual del índice de precios es del 3/100. Si he comprado un piso de 120.000 euros y lo vendo dentro de un año por 122.000 euros, ¿he ganado o he perdido?

3. Una persona gasta cada mes la quinta parte de su salario mensual en alimentación y la sexta parte en alquiler del piso. Después de realizados estos pagos le quedan 570 euros. ¿Cuál es su salario mensual?

4. Un coche circula a 80 km/h durante 18 minutos. ¿Por qué número es necesario multiplicar la velocidad para encontrar la distancia que recorre expresada en km? ¿Cuánto tiempo necesitará para recorrer 64 km a esa misma velocidad?

5. Se considera el número A = 45501/56.

a) Encontrar los dos enteros consecutivos que encuadran a A (o sea, el mayor entero menor que A y el menor entero mayor que A)
b) Calcular en forma de fracción la diferencia entre A y cada uno de los enteros anteriores.
c) Llamemos B al entero más próximo a A. Encontrar tres números racionales comprendidos entre A y B.

6. Demostrar que es posible pavimentar un rectángulo con baldosas cuadradas si y sólo si la razón entre las longitudes de la base y la altura es un número racional.

7. En una familia el padre obtiene 3/5 de los ingresos y el resto lo obtiene la madre. Mientras que ésta paga 2/10 de sus ingresos en concepto de impuestos directos en su declaración de la renta, el padre paga 2/11 de sus ingresos. La familia paga además 1/20 de sus ingresos en impuestos autonómicos y estiman que aproximadamente 3/50 de sus ingresos se pagan en impuestos indirectos (tabaco, gasolina, artículos de lujo, etc.). ¿Qué proporción total de ingresos paga en impuestos esta familia?

8. Realiza las siguientes operaciones:

$$\text{a) } 1+\frac{1}{2}, \quad \text{b) } 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}, \quad \text{c) } 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}, \quad \text{d) } 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$$

¿Eres capaz de descubrir un patrón en esta serie? ¿Podrías, sin necesidad de hacer los cálculos, escribir los tres números siguientes?

9. Usando cálculo mental, decide si $20x\frac{1}{2}x2x\frac{1}{2}$:

- es menor que 22

- está comprendido entre 22 y 50
- es mayor que 40

10. Encuentra dos fracciones positivas cuya suma sea 2 y cuyo producto sea 7/16.

11. Una de cada 10.000 personas aproximadamente contrae tuberculosis a lo largo de su vida. Las pruebas para detectar la tuberculosis dan positivas en el 99/100 de las personas enfermas y también en el 2/100 de las personas sanas (falsos positivos)

- ¿Cuál es la probabilidad de contraer tuberculosis?
- En una población de 40.000 de personas, ¿Cuántas contraerán tuberculosis?
- ¿Cuántos falsos positivos hay?
- ¿Cuántos falsos negativos? (personas enfermas en las que el test es negativo)
- ¿Qué proporción de aquellos en los que el test da positivo está realmente enferma?

C: Conocimientos Didácticos

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

La comprensión del sistema de números racionales pone en juego diversas nociones relacionadas, como fracciones, razones, decimales, así como una rica y compleja variedad de situaciones de uso y medios de expresión. Su estudio está condicionado por la progresiva comprensión de las operaciones aritméticas y de las situaciones de medición de magnitudes no discretas. Los números racionales son el primer conjunto de experiencias numéricas de los niños que no están basadas en los algoritmos de recuento como los números naturales. Hasta este momento el recuento en una forma u otra (hacia delante o hacia atrás, con saltos o no) se podía usar para resolver todos los problemas que se presentaban. Ahora con la introducción de los números racionales el algoritmo del recuento falla (o sea, no hay un número racional siguiente a otro dado; además, las fracciones se multiplican de manera diferente, etc.). La práctica y el discurso que se pone en juego con los "números racionales" suponen un salto importante en la manera de pensar y usar los números que origina dificultades a muchos alumnos.

Las reglas de cálculo con las fracciones se pueden enseñar de manera simple: los alumnos pueden lograr una cierta destreza en el cálculo del denominador común para sumar o restar fracciones sencillas. De igual modo es posible que aprenden rápidamente las técnicas de multiplicar y dividir fracciones. Sin embargo, este enfoque algorítmico y memorístico tiene dos peligros[4]: primero, ninguna de estas reglas ayuda a los estudiantes a pensar sobre el significado de las operaciones o por qué funcionan. Segundo, el dominio observado a corto plazo se pierde rápidamente. Las reglas de operación con las fracciones llegan a parecer similares y se confunden. El enfoque de la enseñanza de las fracciones debe ser el logro del sentido numérico y la resolución de problemas.

1.1. Diseño Curricular Base del MEC

En el Diseño Curricular Base para la Educación Primaria del MEC se mencionan los “números fraccionarios y decimales” en el Bloque 1, indicando las “Correspondencias entre fracciones sencillas y sus equivalentes decimales”. En el apartado de Procedimientos se especifica:

1. Comparación entre números naturales, decimales (de dos cifras decimales) y fracciones sencillas mediante ordenación, representación gráfica y transformación de unos en otros.
2. Interpretación, cálculo y comparación de tantos por cientos
3. Automatización de los algoritmos para efectuar las operaciones de suma y resta con números decimales de hasta dos cifras y con fracciones de igual denominador.

En las orientaciones didácticas se indica: Los números fraccionarios se abordarán como partes de un grupo o de magnitudes continuas en diferentes contextos (reparto y medida). Mediante trabajos manipulativos se comienza con medios, cuartos ..., el décimo se relacionará con el Sistema Métrico Decimal y con los números

[4] (Van de Walle, 2001, p. 228):

decimales. Más detalladamente se incluyen los siguientes contenidos que son pertinentes para este tema:

Hechos, conceptos y principios

1. Números fraccionarios.

  • Correspondencias entre fracciones sencillas y sus equivalentes decimales.

  • El tanto por ciento de una cantidad (%)

Procedimientos

- Interpretación, cálculo y comparación de tantos por ciento.
- Utilización de diferentes estrategias para resolver problemas numéricos y operatorios (reducir una situación a otra con números más sencillos, aproximación mediante ensayo y error, considerar un mismo proceso en dos sentidos -hacia adelante y hacia atrás- alternativamente, etc.).
- Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en las resolución de problemas numéricos u operatorios.
- Representación matemática de una situación utilizando sucesivamente diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico) y estableciendo correspondencias entre los mismos.
- Decisión sobre la conveniencia o no de hacer cálculos exactos o aproximados en determinadas situaciones valorando el grado de error admisible.
- Estimación del resultado de un cálculo y valoración de si una determinada respuesta numérica es o no razonable.
- Automatización de los algoritmos para efectuar las operaciones de suma y resta con fracciones de igual denominador.

Actitudes, valores y normas

- Rigor en la utilización precisa de los símbolos numéricos y de las reglas de los sistemas de numeración, e interés por conocer estrategias de cálculo distintas a las utilizadas habitualmente.
- Tenacidad y perseverancia en la búsqueda de soluciones a un problema.
- Confianza en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo mental.
- Gusto por la presentación ordenada y clara de los cálculos y de sus resultados.
- Confianza y actitud crítica en el uso de la calculadora.

1.2. Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM 2000)

Las nociones de fracción y número racional no son triviales, incluso para los alumnos de secundaria. Sin embargo, un primer contacto con algunas fracciones sencillas, como 1/2, 1/4, etc. se puede proponer, y de hecho los libros de texto lo hacen, para el primer ciclo de primaria. Un desarrollo más completo se inicia en los niveles 3º y 4º. Concretamente, en los grados 3-5 el NCTM (2000) incluye las siguientes expectativas relacionadas con el aprendizaje de las fracciones:

- *Comprensión de los números, modos de representación, relaciones entre números y sistemas numéricos*
    - Comprender las fracciones como partes de un todo unidad, como partes de una colección, como posiciones en la recta numérica, y como divisiones de números naturales.
    - Usar modelos, puntos de referencia y formas equivalentes para juzgar el tamaño de las fracciones.
    - Reconocer y generar formas equivalentes de fracciones usadas comúnmente, decimales y porcentajes.
    - Explorar números menores que 0 ampliando la recta numérica y mediante aplicaciones familiares.
    - Describir clases de números según sus características tales como la naturaleza de sus factores.
- *Calcular con fluidez y hacer estimaciones razonables*
    - Desarrollar y usar estrategias para estimar cálculos con fracciones y decimales en situaciones relevantes a la experiencia del estudiante.
    - Usar modelos visuales, patrones, y formas equivalentes para sumar y restar fracciones y decimales usados habitualmente.

Ejercicio:

1.Analizar las diferencias y semejanzas en las orientaciones curriculares siguientes respecto del estudio de los números naturales y la numeración,
- Diseño Curricular Base del MEC
- Las orientaciones curriculares de tu Comunidad Autónoma
- Principios y Estándares 2000 del NCTM.

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

Los niños comprenden progresivamente la noción de fracción, a partir de sus diferentes significados derivados de los diversos tipos de situaciones de uso, que no son todos igualmente sencillos de comprender para ellos. En la sección 1.1. de la parte B hemos presentado una clasificación de tales situaciones. Cada tipo de situación proporciona significados específicos que deben irse construyendo progresivamente, y cuyo desarrollo ha sido objeto de diversas investigaciones. Analizaremos el desarrollo de algunas de estos significados en lo que sigue.

Desarrollo de la fracción como parte de un todo

Parece ser que las primeras ideas de fracción de los niños son de naturaleza tridimensional e imprecisas.

Ejemplo: Un niño puede decir *"este jarro está medio lleno"*, o *"me he comido medio pastel"*, cuando, en realidad sólo queda una pequeña parte del agua o del pastel. "Medio" en este contexto es para él algo que no está completo, pero queda todavía algo.

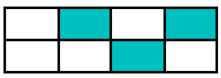
En los experimentos de Piaget[5] se pide a los niños dividir en partes iguales figuras de papel o arcilla, doblándolas o cortándolas para efectuar un reparto equitativo. A las siguientes edades realizan los niños diferentes tipos de tareas:

- 4-5 años: Dividir en mitades figuras pequeñas y regulares;
- 6-7 años: Dividir en tercios;
- 7-9: Dividir en sextos por tanteo;
- 10 años: Dividir sistemáticamente en sextos, partiendo primero por la mitad y luego dividiendo el resultado en tres partes iguales.

En algunos casos los niños realizan estas tareas antes de estas edades o son capaces de comprender la idea de mitad, tercio y sexto aunque físicamente tengan dificultad en realizar la división de la figura en partes iguales. Hay siete criterios para comprender la relación parte-todo:

- Considerar que una región entera se puede dividir en partes;
- Darse cuenta que el mismo todo se puede dividir en diferente número de partes iguales, y podemos elegir el número de partes;
- Las partes de la partición agotan el todo;
- El número de partes puede no ser igual al número de cortes; por ejemplo con dos cortes podemos hacer cuatro partes de una tarta;
- Todas las partes son iguales;
- Cada parte en sí misma se puede considerar como un "todo";
- El "todo" se conserva, aún cuando se haya dividido en partes.

Para comprobar si los niños comprenden estas ideas se les puede plantear actividades como indicar qué fracción se representa en las siguientes regiones sombreadas:

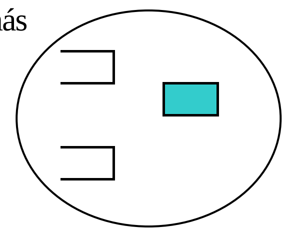


En esta fracción algunos niños creen que la fracción coloreada es 3/5

En esta fracción algunos niños creen que la fracción coloreada es 7/10.

La fracción como parte en un conjunto discreto de objetos

Algunos experimentos sugieren que para los niños es más difícil comprender la idea de fracción en un conjunto discreto de objetos. Por ejemplo, al preguntar a los niños qué fracción representan las piezas coloreadas dentro del siguiente conjunto, el 40% de los niños de 10 años contestan que 1/2 en lugar de 1/3, no considerando el conjunto total como un todo.



[5] Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1960). *The childs' conception of geometry*. Londres: Routledge and Kegan.

Representación de las fracciones como puntos en una recta numérica

El modelo de recta numérica de las fracciones ocasiona dificultades a los niños que no siempre son capaces de pasar de la representación de áreas a la recta o viceversa[6]. El modelo de recta numérica resulta más difícil que los anteriores.

En la representación lineal se enfatiza la idea de que una fracción, por ejemplo 4/5 es esencialmente un número, de idéntica naturaleza que los números 0 y 1, pero comprendido entre ambos. A diferencia de las dos representaciones anteriores no se incorpora la idea de relación parte-todo.

Una ventaja de la representación lineal es que las fracciones impropias son más naturales y no tan diferentes de las fracciones propias y también se visualiza la idea de que las fracciones "extienden" el conjunto de los números naturales y "rellenan los huecos" dejados por éstos en la recta numérica. De esta forma se enlaza de forma natural con la idea de medida no entera.

La fracción como división indicada de dos números enteros

Al calcular porcentajes o transformar una fracción en decimales es necesario dividir dos enteros. Esta situación también se presenta en problemas como el siguiente:

Hay que repartir a partes iguales tres tabletas de chocolate entre 5 niños

Sólo un 40 % de los niños de 12 años responde correctamente a este problema, lo que sugiere que el resto no han comprendido que cualquier número entero puede dividirse en cualquier número de partes iguales.

Equivalencia y comparación de fracciones

Hemos desarrollado este aspecto en el tema dedicado a proporcionalidad, así como en el dedicado a probabilidad. Tanto en la proporcionalidad como en los problemas de comparación de probabilidades se ponen en juego la comparación de dos fracciones. Remitimos a estas lecciones, donde se describen las etapas que siguen los niños en la comprensión del orden y equivalencia de fracciones.

Otras dificultades y errores

Una primera dificultad en el estudio de las fracciones consiste en que los alumnos atribuyan un significado correcto a la noción de fracción, y por tanto, a cada uno de los enteros que aparecen en la escritura de una fracción. Se trata de una notación nueva para los alumnos de este nivel, ya que hasta este momento sólo conocen los números naturales.

Algunos de los errores más frecuentes que cometen los alumnos tras el estudio del tema, que se manifiestan incluso en niveles de secundaria, son los siguientes:

- Un entero se confunde con su inverso: 1/7 se confunde con 7/1, o bien, 1/7 y 7/1 se consideran como dos escrituras equivalentes.
- Una fracción como ½se considera menor que la fracción 1/3, argumentando que 2 < 3.
- El conocimiento de los naturales puede ser un obstáculo para el dominio de los números racionales; por ejemplo, algunos niños pueden afirmar que 1/3 < 1/5 explicando que 3 <5.

---

[6] Novillis, C. F. (1976). An análisis of the fraction concept into a hierarchy of selected subconcepts and the testing of the hierarchical dependencies. *Journal for Research in Mathematics Education,* 7, 131-144.

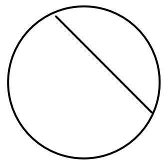
- La mitad de la fracción 1/6 se designa frecuentemente por la fracción 1/3 (que es en realidad el doble de 1/6), argumentando que la mitad de 6 es 3.
- Para multiplicar entre sí dos fracciones, se les reduce a un común denominador, después se multiplican los numeradores olvidando de multiplicar entre sí los denominadores. Se trata de una confusión entre las reglas de la adición de fracciones y las de la multiplicación.

Remitimos al lector al libro de Llinares y Sánchez (1988, cap. 6) para una descripción más detallada del tipo de errores más frecuentes en el estudio de las fracciones por los niños, con explicación de su posible origen y actividades para su prevención y remediación.

Ejercicio 2:

En la tabla siguiente se incluyen ejemplos de items de evaluación usados en distintas investigaciones y porcentajes de respuestas correctas. Para cada uno de ellos estudia qué aspecto de las fracciones se evalúa. Trata de explicar las diferencias en los índices de dificultad.

Item 1[7]. *¿Está dividido este círculo en dos mitades? ¿Por qué?*



El 89% de los niños de 12-13 años dieron una respuesta correcta, mientas que otros opinaron que sí. Para ellos "dos mitades" era equivalente a dos trozos.

Item 2. *En una caja de 12 huevos hay 5 cascados. ¿Qué fracción de huevos está cascada?*

El 70 % de los niños de 12-13 años dan una respuesta correcta..

Item 3. *Juan y Andrés reciben su paga semanal. Juan gasta la cuarta parte y Andrés gasta la mitad de su paga. ¿Es posible que Juan gaste más que Andrés? ¿Por qué?*

En este ítem el 41% de los niños de 12 años piensan que es imposible.

Item 4[8]. *Supongamos que x/y representa un número. Si se duplican los valores de x e y el nuevo número es:*

a) La mitad de grande que x/y

b) igual a x/y

c) doble que x/y

El 20 por ciento de los niños de 11 años dan una respuesta correcta a este ítem

Item 5. *En una clase hay 40 alumnos, 3/5 son niñas. ¿Cuántas niñas hay en la clase?*

El 22 % de los niños de 11 años dan la respuesta correcta

3. SITUACIONES Y RECURSOS

De acuerdo a los apartados anteriores, haremos una propuesta de enseñanza con dos secuencias didácticas paralelas: la vía de las situaciones concretas y la de las situaciones formales. La primera es necesaria para establecer el sentido o significado de

[7] Hart, K. (1980), *Secondary School Mathematics Project.* Research Monograph. Londres: Chelsea College.

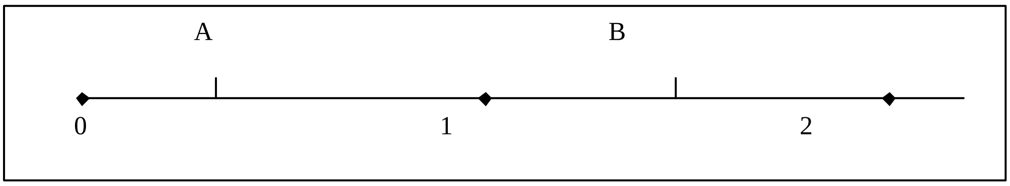
[8] NAEP, 1980

las fracciones, y también para justificar los hechos numéricos básicos y las técnicas de cálculo. La segunda es necesaria para consolidar las técnicas de cálculo.

3.1. Situaciones concretas

Las actividades introductorias para facilitar "el primer encuentro" con las fracciones se deben apoyar en las diversas representaciones: modelos de áreas, conjuntos discretos, recta numérica, etc.

Por ejemplo, en lo que concierne a la recta numérica, podemos proponer a los niños que tengan que comunicar a otros la posición exacta de ciertos puntos (correspondientes a 1/3 y 5/3, por ejemplo) marcados sobre una semirecta graduada, en la cual se han marcado claramente los números 0, 1 y 2, los cuales indican la unidad de longitud elegida para graduar la semirecta.



Los niños deberán descubrir en primer lugar la relación entre la posición de estos puntos y la división de la longitud unidad en partes iguales, y después inventar una escritura que les permita comunicar estas posiciones a sus compañeros, los cuales sólo tienen una semirecta graduada con la misma unidad de longitud sobre la que aparecen marcados el 0, 1, y 2.

En este contexto, la notación de fracción, que podrá ser propuesta por el maestro durante la corrección de la actividad, surgirá como una respuesta a un problema que tiene pleno sentido para los niños y los papeles del numerador y del denominador se distinguirán rápidamente, ya que cada uno proporciona una información necesaria para el posicionamiento correcto del punto.

Esta misma situación se puede también explotar para que los niños "descubran" que las fracciones 1/3 y 2/6, por ejemplo, son dos codificaciones diferentes de la posición de un mismo punto y, por tanto, existen numerosas fracciones equivalentes a una fracción dada. A partir de esto, la investigación de las reglas de simplificación de las fracciones se puede iniciar con fracciones simples.

Este tipo de introducción, además del interés que presenta para dar sentido a la noción y la notación de las fracciones, permite también no limitarse a las fracciones inferiores a la unidad, como ocurre habitualmente con el contexto del reparto de las tartas que suele usarse con frecuencia.

Esta presentación no es suficiente para dar todo su sentido a las fracciones. Se debe acompañar con otras situaciones en las que esta herramienta se use no solamente como fracción de longitud, sino también como fracción de área o de tiempo, y en general con situaciones en las que se pongan en juego los diversos contexto de uso de las fracciones.

Recomendamos una secuencia de situaciones concretas, que el alumno debe resolver por sí mismo. El profesor debe controlar que el niño entiende el enunciado, pidiéndole que lo explique con sus propias palabras y animándole a que encuentre una estrategia de resolución. Es decir, se trata, básicamente, de situaciones a-didácticas [9].

[9] Situación a-didáctica, aquel momento del proceso de enseñanza-aprendizaje en que el alumno está comprometido con la resolución de una tarea problemática que asume como propia.

Se puede animar al niño representar los datos del problema, usando alguno de los recursos que describimos en la sección 3.3.

Las variables didácticas de las situaciones de introducción de las fracciones son las siguientes:

- *Significado de las fracciones:* parte- todo, comparación parte- parte, división de dos números, comparación de dos medidas, punto en la recta numérica, etc.
- *Tipos de fracciones:* igual- distinto denominador, menores mayores que la unidad, enteras o no enteras, denominadores múltiplos unos de otros o no, etc.
- *Grado de contextualización de la situación:* Situación que se refiere a materiales presentes en el aula y con el niño como actor. Situación hipotética contextualizada con material a disposición del niño para que pueda efectuar una representación simbólica. Situación hipotética contextualizada sin material a disposición del niño.
- *Tipo de material utilizado:* Estructurado o no estructurado.
- *Posición de la incógnita en las operaciones:* En el primer término, el término inicial o uno de los términos parciales.
- *Número de datos:* Dos, tres o más.

Ejercicios:

2. Preparar una secuencia de tareas para alumnos de 5º curso en las que se incluyan una muestra de valores de las variables didácticas identificadas en el estudio de las situaciones concretas de uso de las fracciones.

3. Analizar en un libro de texto de 5º de primaria si se incluyen o no situaciones concretas en el estudio de las fracciones y los valores de las variables didácticas tenidas en cuenta.

3.2. Situaciones formales. Aprendizaje de algoritmos

En estas situaciones se presenta al alumno operaciones formales con las fracciones, es decir, ejercicios del tipo: 5/7+4/5, etc. En un primer momento se animará al niño a hallar sus propias estrategias, para dar sentido a las operaciones.

Rápidamente se pasará a utilizar diversas representaciones (áreas, conjuntos, recta numérica, diagramas en árbol) para facilitar la comprensión y adquisición de técnicas de cálculo. Las variables didácticas de las situaciones son las siguientes:

- *Tipo de operación:* suma, resta, multiplicación y división.
- *Dirección de la operación:*

  Directa (por ejemplo, 2 / 5 x 1/4 = ?

  Inversa (por ejemplo, ? x 2/ 5 = 1/10
- *Tipos de fracciones, tamaño de los términos y del resultado de la operación:*
  1. Suma y resta de fracciones de igual denominador;
  2. Suma y resta de fracciones, denominadores múltiplos uno de otro;

3. Suma y resta de fracciones con denominadores no múltiplos, fácilmente descomponibles en factores;
4. Suma y resta de fracciones cualesquiera;
5. Multiplicar /dividir una fracción por un entero;
6. Multiplicar /dividir dos fracciones;
7. Operaciones combinadas

- *Técnica de cálculo:* Uso de material o representaciones gráficas, técnica escrita.
- *Tipo de material o representaciones usadas;* conjuntos de objetos, modelos de áreas, recta numérica, etc.

Ejercicios:

4. Preparar una secuencia de tareas para alumnos de 6º curso en las que se incluyan una muestra de valores de las variables didácticas identificadas en el estudio de las situaciones formales de uso de las fracciones.

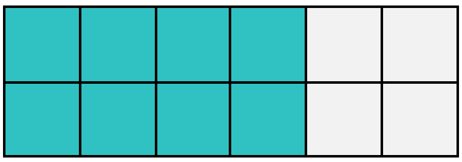
5. Analizar en un libro de texto de 6º de primaria si se incluyen o no situaciones formales en el estudio de las fracciones y los valores de las variables didácticas tenidas en cuenta.

3.3. Modelos gráficos para el estudio de las fracciones

A lo largo del tema hemos mencionado algunas representaciones gráficas mediante las cuales se expresan situaciones de uso de las fracciones. El uso de estas representaciones es una opción del profesor, por lo que se trata de una variable didáctica de las situaciones concretas en el estudio de las fracciones.

Modelos de áreas

Una figura, principalmente rectangular o circular se divide en partes iguales, sombreando la parte correspondiente a la fracción representada.



¿Qué fracción expresa la relación entre el área de la superficie sombreada y la superficie del rectángulo mayor?
¿Cuánto mide el área sombreada si usamos como unidad de medida el rectángulo mayor?

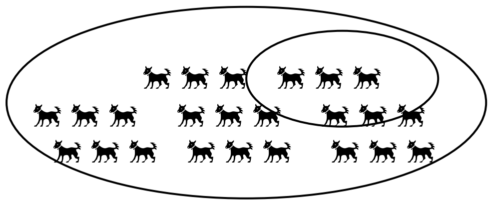
Este tipo de situaciones de medida o comparación de áreas (con figuras rectangulares o circulares) se pueden utilizar como modelos de otras situaciones de contextos no geométricos. Por ejemplo,

"Tenemos que repartir 120 euros entre 12 personas. ¿Qué fracción del total corresponde a 8 personas? ¿Cuántos euros corresponden a estas 8 personas?"

Esta situación se puede representar "visualmente" con el gráfico o modelo de áreas anterior interpretando que el rectángulo mayor "representa las 12 personas (el todo o unidad), y la parte sombreada a las 8 personas.

Representación mediante conjuntos

Cuando el conjunto que se quiere dividir es discreto y el número de objetos es múltiplo de las partes, una representación de los objetos puede visualizar el problema de reparto.



Modelos lineales

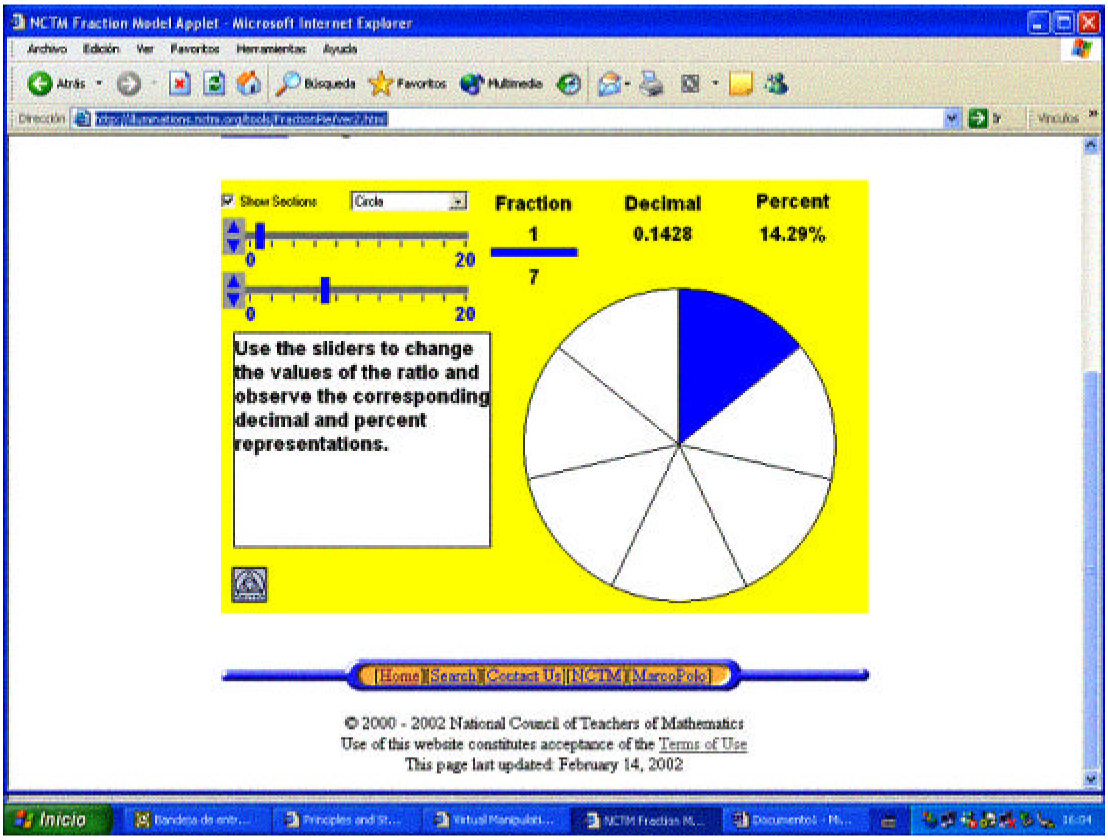
Al igual que en el caso de los números naturales, podemos visualizar las fracciones a lo largo de una recta. Tomamos en ella una cierta longitud como unidad a repartir, y a partir de ella representamos la fracción.

↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	1/4	1/2	3/4	1	5/4	3/2	7/4	2

3.4 Recursos en Internet

Modelos de fracciones y expresión de números racionales:

http://illuminations.nctm.org/tools/FractionPie/ver2.html



Descripción

Permite explorar varios modelos para representar fracciones con numeradores y denominadores ajustables. Un mismo número racional se usa para expresar una parte de un todo en los casos en que el todo viene dado mediante un círculo, un rectángulo y un conjunto discreto de fichas circulares. Se comparan simultáneamente tres notaciones: fracción, decimal y porcentaje.

Los valores de los numerador y denominador se agrupan en tres versiones:
Versión 1: El rango del numerador está limitado a valores de 0 a 20, y el denominador toma valores fijados en 1, 2, 4, 5, 8, 10 y 20.
Versión 2: El rango del numerador y el denominador varia entre 0 y 20
Versión 3: El rango del numerador y el denominador varia entre 0 y 100.

Tanto el numerador como el denominador se indican en la recta numérica y se cambian desplazando cursores.

Ejercicio 6:

1. Explorar las tres versiones del programa, representando fracciones mayores y menores que la unidad y comparando las tres representaciones gráficas del todo y las partes.
2. Escribir una ficha de trabajo para los alumnos de 6º curso de primaria proponiendo una secuencia de tareas de expresión y representación de fracciones equivalentes mayor es y menores que la unidad.
3. Identificar las características ergonómicas (eficacia, rapidez, posibilidades de comparación, etc.) del uso del programa en relación al contexto tradicional de uso de papel, lápiz y calculadora.
4. La expresión decimal de los racionales no decimales no se puede realizar correctamente con este programa. ¿Por qué? ¿Qué tareas y recursos puede utilizar el profesor para que el uso del programa no genere un obstáculo didáctico en relación a la notación decimal y porcentual?
5. ¿Crees que la representación independiente del numerador y el denominador en la recta numérica puede ser un obstáculo didáctico para la representación en la recta de los números racionales¿ ¿Cómo se puede evitar?

4. TALLER DE DIDÁCTICA

4.1. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 3er ciclo de primaria y 1er ciclo de secundaria (recomendamos buscar los libros que utilizastes personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

- Estudia el desarrollo del tema de “fracciones y números racionales” en dichos niveles.
- Indica en qué curso se inicia y cuando termina.
- Busca algún tipo de problema o tarea que consideres no está representado en la muestra de problemas que hemos seleccionado en la situación introductoria inicial.
- Identifica aspectos del desarrollo del tema que consideres potencialmente conflictivos para los alumnos de dichos niveles.

4.2. Análisis de respuestas de estudiantes a pruebas de evaluación

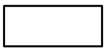
En los siguientes ejemplos analiza las tareas presentadas y las respuestas de los niños, indicando los errores subyacentes y la forma en que podría ayudar la maestra a superarlos.

1. Una maestra pide a sus alumnos que ordenen de menor a mayor las fracciones 1/4 y 1/6.

El 20% de los niños dicen que ¼ < 1/6 por que 3<5.

¿Qué explicación puede tener esta respuesta de los niños?. ¿Qué podría hacer la maestra para que los alumnos comprenden la ordenación de fracciones?

2. En las siguientes tareas que piden hallar el todo, conocida una parte, que se expresa mediante una fracción del todo. Explica por qué esta actividad es difícil y qué puede hacer el maestro para ayudar a los alumnos.

"Si esta región  es los 3/5 de una región encuentra la región unidad"

"Si esta colección de bolas

o o o o o
o o o o

son los 3/5 de un total de bolas encuentra el total de bolas".

3. Un maestro pone este problema a sus alumnos:
"De los 25 alumnos de la clase 3/5 son niñas. ¿Cuántos niños hay?"
Un alumno responde así:25 –3/5 =125/5 – 3/5 = 122/2 niños
Explica cómo ayudarías a este alumno para que comprenda el enunciado y la manera de resolverlo.

4. Indicamos a continuación la respuesta de un estudiante al siguiente problema:
"De la superficie total de España (504.000 km^2, aproximados), los dos tercios son de paisaje llano. ¿Cuántos kilómetros cuadrados representa esta fracción?.
Respuesta de un alumno:

504000 ______ 3/3
x ______ 2/3

$$x = (504.000 x\ \ 2/3)/(3/3) = 336.000\ km^2$$

¿Cómo explicarías la solución de este problema sin usar "la regla de tres"?

4.3. Análisis de experiencias didácticas

A. El espesor de una hoja de papel

Analiza la siguiente experiencia de estudio de las fracciones y racionales diseñada y experimentada por G. Brousseau[10]. Se trata de una secuencia de estudio que permite a los niños "reinventar" los números racionales bajo la dirección del profesor. Al finalizar:

- Enumera los conocimientos y habilidades previas que consideras necesarias para la realización de estas actividades
- ¿Cuál es el objetivo que se persigue en cada una de las secuencias en que se ha dividido la situación didáctica?
- Describe los conocimientos matemáticos que se ponen en juego a lo largo del proceso de estudio.
- Confronta las respuestas dadas a estas cuestiones con el análisis que se hace en Centeno (1988, pags. 124-125).

Tarea: Se pide a los alumnos medir el espesor de hojas de papel de diferente grosor con un calibrador; como las hojas son muy finas, se propondrá que las midan no de una en una, sino un paquete con un número determinado de tales hojas.

[10] siguiendo el resumen elaborado por Centeno (1988).

Como resultado obtienen dos números: el número de hojas que tiene el paquete y la medida en milímetros del espesor del paquete. Estos pares de números se pueden comparar, sumar, restar, multiplicar por un número natural, y también dividir.

Material necesario:

- Unas 2000 hojas de papel del mismo tamaño (medio folio, por ejemplo), del mismo color, pero de 5 grosores (papel de calco, folios normales, cartulinas, etc.). Se distribuyen en 10 cajas, dos de cada grosor, que contienen cada una alrededor de 200 hojas.
- Calibradores que permitan medir espesores con una precisión del milímetro (dos por cada grupo de cinco alumnos).
- Un biombo o una cortina que permita dividir la clase en dos. Se puede prescindir de esto si el local es bastante grande como para separar a los alumnos en dos grupos de forma que puedan ver los niños de un grupo lo que hacen los del otro grupo.

Organización de la clase

La situación se desarrolla a través de ocho actividades, que se realizan a lo largo de nueve secuencias de 60 a 70 minutos. El esquema de organización es similar para cada una de las secuencias. Hay acciones individuales, en grupos pequeños, puestas en común entre grupos pequeños, puestas en común de toda la clase, y tiempos destinados a hacer la síntesis de lo adquirido.

1. Primera secuencia S_1: El objetivo es medir el “espesor de una hoja de papel”

Se divide el aula en dos partes con un biombo. En cada parte se colocan cinco cajas conteniendo cada una 200 hojas de papel.

Situados los niños en una de las partes del aula, el maestro los distribuye en grupos de 4 ó 5.

El maestro dice: *“Mirad las hojas que he preparado en las cajas A, B, C, D, E. En cada caja todas las hojas tienen el mismo espesor y cada caja tiene hojas de espesor distinto. ¿Podéis apreciar las diferencias de unos espesores a otros?*

Se hacen circular entre los alumnos algunas hojas de forma que todos los niños puedan tocarlas y compararlas

- *¿Cómo podemos distinguir unas hojas de otras?*

  Algunos niños responden que por el peso.
- *Debéis inventar otra manera de designar y reconocer cada uno de estos tipos de papel, de forma que los podamos distinguir sólo por el espesor.*

Los niños intentan al principio medir el espesor de una hoja, pero pronto se dan cuenta de que no es posible.

Después empiezan a medir paquetes de hojas, las cuentan y ya tienen un código que puede servir para designar los espesores. Dan, por ejemplo, 70 hojas 3 mm; 50 hojas 3 mm; etc.

Cuando en todos los grupos se ha encontrado este sistema de designación de hojas se pasa a un “juego de comunicación”. Cada grupo se subdivide en dos: uno de emisores y el otro de lectores.

Para probar el código elaborado, todos los emisores se colocan en una de las dos partes del aula y los lectores en el lado opuesto. Los emisores eligen una de las cajas y escriben mensajes que envían a los niños con los que han elaborado antes el código. Los lectores deben reconocer la hoja de que se trate y para asegurarse de que el código ha funcionado deben comunicar después con los emisores.

El maestro pasa los mensajes de unos a otros, recibe las respuestas y verifica con todo el equipo si se ha acertado o no. Para escribir los mensajes ha preparado previamente unas tarjetas en las que los niños deben escribir el número de su equipo, los mensajes enviados (numerados: juego 1, juego número 2, etc.) y si han sido acertados o no.

Cuando todos los equipos han hecho varios juegos, y todos los niños han sido emisores y receptores más de una vez, se pasa a una tercera fase, que consistirá en una puesta en común de todos los equipos.

El desarrollo de las siguientes secuencias es el siguiente:

S_2: Comparar los espesores (pares de números) y hallar pares equivalentes.
S_3: Determinar clases de equivalencia de pares de números, observando que un mismo espesor se puede representar por muchos pares, que son por tanto equivalente.
S_4: Hallar el espesor de una hoja gruesa formada por dos hojas pegadas (esto lleva a dar significado a la multiplicación de espesores –fracciones- por un número natural).
S_5: Generalizar los procedimientos descubiertos calculando sumas de espesores.
S_6: La diferencia de dos espesores permitirá a los niños dar significado a la diferencia de fracciones.
S_7: Dar significado al producto de espesores por un número natural, hallando el espesor de un cartón grueso formado por varias hojas del mismo grosor (producto de un racional por un natural).
S_8: Evaluar el espesor de un cartón comparándolo con un milímetro (se trata de saber si una fracción es mayor, menor o igual a un milímetro).
S_9: Conocido el espesor de un cartón formado por un número de hojas de igual espesor hallar el espesor de una hoja. Esta actividad dará significado a la división de un racional por un entero.

B. Reproducción de un segmento con una unidad no convencional

Se pide a los futuros profesores leer la sección 8.5.2. del libro de Centeno (1988) donde se describe otra situación didáctica específica para dar sentido al uso de las fracciones en el contexto de medidas lineales y realizar un análisis semejante al anterior.

BIBLIOGRAFÍA

Castro, Enc. y Torralbo, M. (2001). Fracciones en el currículo de la educación primaria. Enr. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (p.285-314). Madrid: Síntesis.

Centeno, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?*. Madrid: Síntesis.

Ferrero, L. y cols (1999). *Matemáticas (5º y 6ª Primaria)*. Madrid: Anaya.

Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1988). *Fracciones*. Madrid: Síntesis

Krause, E. (1991). *Mathematics for elementary teachers* (2nd ed.).Toronto: D.C.Heath.

Maurin, C. y Johsua, A. (1993). *Les outils numériques à l'école primaire et au collègue*, Vol 1. París: Editions Marketing (Ellipses).

Post, Th. R. (Ed.) (1988). *Teaching mathematics in grades K-8*. Boston: Allyn and Bacon.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y SU DIDÁCTICA PARA MAESTROS

Capítulo 5:

NÚMEROS Y EXPRESIONES DECIMALES

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE DECIMALES EN PRIMARIA

A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

a) Resuelve los problemas propuestos.
b) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
c) Identifica diferencias y semejanzas entre los distintos problemas.
d) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
e) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
f) Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria

1. ¿Qué quiere decir 3'2 mm? ¿Podrías medir esa longitud con tu regla? ¿Por qué?

2. ¿Qué significa el punto que separa las cifras 62.3 y 36.4 en una báscula y un termómetro?

3. Expresa en forma de número decimal: 6/10, 23/10, 63/100.

4. Expresa las siguientes cantidades en centésimas:
   a) 8'43; b) 0'7; c) 20'5; d) 26'3

5. ¿Qué número decimal está representado en cada caso:
   a) 2 decenas 3 unidades 2 centésimas y 3 milésimas;
   b) 0'02 + 0'5 + 70 + 400
   c) 1 unidad 1 décima y 1 milésima.

6. Indica cuáles de estas fracciones son fracciones decimales:
24/10 5/8 26/1000 32/25 13/100 4/20 7/10 25/1000

7. ¿Qué fracción decimal representa cada número?:
a) 0'25; b) 0'007; c) 0'45; d) 0'05; e) 0'06 f) 0'004

8. Ordena de mayor a menor: 15,56 10,257 36,2 15,65 10,57 3,62
9. Entre qué parejas de números está comprendido 5,345

- entre 5,33 y 5,34
- entre 53,3 y 53,4
- entre 5,34 y 5,35
- entre 5,35 y 5,36

10. Aproxima estos números a la unidad: 3,69 5,27 31,19 15,4 13,6 27,85

11. Escribe con cifras estas fracciones decimales:
a) Cuatro milésimas; b) Seis décimas; c) Veinte centésimas; d) Trece milésimas.

12. Con las teclas

.	0	3	6	9

de tu calculadora escribe:

a) el mayor número posible menor que 100
b) el número más próximo a 1
c) el número mayor posible
dI El número menor posible.

13. Realiza estas sumas: 2,36+1,34; 15,36+4,64

14. Calcula mentalmente, anota los resultados y comprueba con tu calculadora:
    - 1,5+0,01
    - 02,55-36,7
    - 16,25-5,3

15. Calcula el cociente exacto: 23,64:4

16. En España, cada persona adulta consume al año, por término medio, 65'5 kg de carne, 29'53 kg de pescado y 6'89 kg de legumbres. ¿Cuántos kilos consume al año, en total, de estos alimentos?

17. En un salto un león recorre 3,25 metros. ¿Qué distancia habrá recorrido en 30 saltos? ¿Y en 2000 saltos?

18. Mariano está en cama con anginas. La doctora le ha recetado una dosis de 5 centímetros cúbicos de un jarabe (aproximadamente una cucharada) tres veces al día. En el prospecto dice que cada centímetro cúbico de jarabe tiene 6'25 mg de "amoxicilina". ¿Cuánta "amoxicilina" toma Mariano en una dosis? ¿Y al día?

19. Un coche consume 8,4 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?

B: Conocimientos Matemáticos

1. FRACCIONES DECIMALES. NÚMEROS DECIMALES

Decimos que una fracción es *decimal* si su denominador es una potencia de 10. Llamaremos *números decimales*[1] a los racionales para los cuales se puede encontrar una fracción decimal representante.

Ejemplos: El racional 7/4 es decimal porque la fracción 7/4 es equivalente a 175/100.
Sin embargo, 7/3 no es decimal porque cualquiera de sus fracciones equivalentes tiene un denominador con el factor primo 3 y, por tanto, no puede ser una potencia de 10. La descomposición en factores del denominador de una fracción irreducible representante de un número decimal no puede contener factores primos distintos de 2 o de 5.

En 1585 el matemático belga Simón Stevin, en su libro *La Disme,* propuso, fraccionar la unidad en décimas, centésimas, milésimas, etc. para medir cantidades de magnitudes menores que la unidad. Con este sistema, el resultado de una medida vendría siempre expresado mediante un número entero y fracciones decimales. Por ejemplo, $7+\frac{3}{10}+\frac{5}{100}$ metros, en el caso de una medida de longitud.

También sugirió que, en lugar de usar los denominadores para expresar las partes de la unidad en la parte fraccionaria del número, se podría adoptar un criterio de posición. Este criterio desembocó rápidamente en el actual, que consiste en poner una coma (o un punto) a la derecha de las unidades y escribir a continuación los numeradores de las fracciones decimales siguiendo el orden de décimas, centésimas, milésimas, etc., poniendo ceros cuando falta alguna de esas fracciones.

Ejemplo. El número $7\frac{3}{10}\frac{5}{100}$ se escribe 7’35. Sabemos que 3 hace referencia a décimas porque esa cifra ocupa el primer lugar a la derecha de la coma y que 5 se refiere a centésimas porque ocupa el segundo lugar a la derecha de la coma.

- De esta manera para las fracciones decimales podemos usar un sistema de representación decimal posicional equivalente al definido para los números naturales. La parte situada a la izquierda de la coma es la ‘parte entera’ del número decimal y la situada a la derecha de la coma la ‘parte decimal’.
- Los números naturales admiten un representante decimal cuya parte decimal es cero.
- Un número decimal admite un representante cuya notación decimal tiene un número

[1] Algunos autores llaman números decimales a cualquier número real expresado en forma decimal. Nosotros preferimos seguir el criterio de autores como Centeno (1988) o Socas (2001) y llamar números decimales únicamente a los números racionales que tienen como representante una fracción decimal. De este modo, diferenciamos entre las expresiones decimales de un número (que también existen para los reales) y los números decimales D que es un subconjunto de Q.

finito de cifras[2].

El interés de la representación decimal de las fracciones decimales se debe a la posibilidad que proporcionan de utilizar los algoritmos de cálculo definidos para los números naturales. Desde el momento en que la parte decimal de un número decimal se construye siguiendo las mismas reglas que se usan para la parte entera podemos trasladar los algoritmos de suma, resta, multiplicación y división entera al caso de los números decimales sin más que añadir algunas consideraciones acerca de la colocación de las comas. Esto permite abreviar los cálculos con fracciones decimales. Si además el sistema de unidades de medida es decimal, todas las medidas pueden expresarse mediante números decimales y las operaciones entre ellas se hacen más fáciles. Esto último se puso en práctica a partir de la instauración del Sistema Métrico Decimal, creado en Francia a finales del siglo XVIII.

Ejercicios

1. Si la fracción a/b es irreducible, a < b y $b = 2x5^4$, ¿Cuántos dígitos decimales aparecen a la derecha de la coma al expresar esta fracción en forma decimal?

2. LOS NÚMEROS DECIMALES COMO SUBCONJUNTO DE Q. EXPRESIONES DECIMALES

2.1. Distinción entre expresión decimal y número decimal

La expresión 0'75 designa un *número decimal*, que también se puede escribir en forma de fracción, 75/100, la cual a su vez es equivalente a la fracción irreducible ¾ Son tres formas de escribir y de hablar sobre un número decimal particular.

La expresión o notación decimal con un número finito de cifras decimales se puede usar en todos los racionales que pueden ser representados por una fracción cuyo denominador es una potencia de diez[3]. Este subconjunto (D) de números racionales (Q) recibe el nombre de "conjunto de los números decimales" ($D \subset Q$).

Los *números decimales*, y la notación decimal con la que se expresan son de gran importancia en las matemáticas y sus aplicaciones prácticas debido a una propiedad importante: se trata de un *conjunto denso* en Q y en R (números reales), lo que quiere decir que cualquier número real x se puede acotar por medio de números decimales tan próximos a x como se desee (existe un número decimal cuya diferencia con x es tan pequeña como se quiera)

Observación:

Se tiene tendencia a llamar 'número decimal' a un número cuya expresión tiene una parte decimal "visible". Pero los números naturales son también números decimales,

---

[2] Ejemplo, 1/5 = 2/10 = 0'2. Pero veremos después que el número decimal 0'2 se puede escribir también con infinitas cifras (0'199999 ...). Por tanto, la longitud de la expresión decimal no determina el carácter de decimal o no de un número racional.

[3] Posteriormente ampliaremos la representación decimal a otros racionales cualesquiera y a los números irracionales. Sin embargo, mientras que en los números decimales hay un representante cuya representación decimal es finita, en los demás casos esto no es posible.

simplemente su parte decimal (la escrita a la derecha de la coma) se reduce a 0 (o también a '9999...), y no se escribe. Por otro lado, existen racionales no decimales.

- Se llama *número decimal* a aquellos racionales que tienen una fracción representante con denominador potencia de 10 (fracciones decimales).
- Todos los números decimales son racionales, pero no todos los racionales son decimales.
- No obstante, cualquier racional no decimal se puede expresar en notación decimal, aunque el número de cifras a la derecha de la coma es infinito, con cifras que se repiten.

El número de cifras decimales es una característica de la expresión decimal (numerales) no de los números, ya que un mismo número se puede representar mediante diferentes expresiones decimales: 34'1 = 34'10 = 34'100, ... = 34'0999...

Los números decimales se pueden expresar también "en forma polinómica", con potencias de base 10 (si se usa dicho número como base del sistema de numeración) usando exponentes positivos y negativos. Por ejemplo:

$$23'75 = 2.10 + 3 + \tfrac{7}{10} + \tfrac{5}{10^2} = 2.10^1 + 3.10^0 + 7.10^{-1} + 5.10^{-2}$$

que se lee, dos decenas, 3 unidades, 7 décimas y 5 centésimas.

La notación decimal para expresar los números racionales es importante ya que es más fácil trabajar con ella que con la notación de fracción. Por ejemplo, al comparar dos racionales es más rápido comparar las expresiones decimales que las fracciones:

Ejemplo: Para comparar 7/8 con 22/25 hay que reducir las fracciones a común denominador y comparar los numeradores. Sin embargo, si los expresamos en notación decimal, 7/8 = 0'875, y 22/25 = 0'88, vemos en seguida que 22/25 es mayor.

La notación decimal es también cómoda para encontrar un número racional comprendido entre otros dos dados. La mayor ventaja es en la realización de operaciones aritméticas, ya que se pueden usar algoritmos similares a los desarrollados para trabajar con números enteros.

2.2. Caracterización de los números decimales

Proposición: Si *r* es un racional representado por su fracción irreducible *n/d*, para que *r* sea un número decimal la descomposición del denominador *d* en factores primos sólo debe tener potencias de 2 y/o de 5.

En efecto, si el denominador tiene sólo los factores 2, 5 o ambos, podemos obtener una potencia de 10 en el denominador multiplicando numerador y denominador de dicha fracción por una potencia conveniente de 2 y/ o de 5.

Podemos probar que también es cierto el teorema recíproco, o sea que la condición es necesaria, por reducción al absurdo.

Supongamos que la fracción tenga un factor distinto, por ejemplo 3 (*a*/3). En este caso,

$$\frac{a}{3} = \frac{x}{10^n}$$

Factorizando 10^n en números primos tenemos:

$$\frac{a}{3} = \frac{x}{2^n.5^n}$$

lo cual conduce a: $a.\ 2^n\ .\ 5^n = 3.\ x$

Este resultado contradice el teorema de factorización única de la aritmética según el cual todo número natural admite una descomposición única en factores primos. En este caso el factor 3 figura en el segundo miembro y no en el primero. Esto lleva a rechazar el supuesto de que la fracción *a*/3 corresponda a un número decimal.

3. TÉCNICA DE OBTENCIÓN DE EXPRESIONES DECIMALES

3.1. Caso de los números racionales decimales

Para encontrar la expresión decimal de un número decimal se busca una fracción equivalente a la dada cuyo denominador sea una potencia de 10 y se descompone en parte entera, décimas, centésimas, etc.

Ejemplo. Si queremos expresar en notación decimal el número decimal 17/8, primero examinamos su denominador $8 = 2^3$ y vemos que es necesario multiplicarlo por 5^3 para obtener una potencia de 10. A partir de ahí se hace lo siguiente:

$$\frac{17}{8} = \frac{17x125}{8x125} = \frac{2125}{1000} = \frac{2000}{1000} + \frac{100}{1000} + \frac{20}{1000} + \frac{5}{1000} = 2 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} = 2'125$$

Primera técnica

Una primera técnica consiste en encontrar la fracción equivalente a la dada cuyo denominador sea una potencia de 10, escribir el numerador, contar en el numerador, empezando por la derecha, tantas cifras como ceros tiene el denominador y colocar la coma decimal.

Segunda técnica

Se basa en la relación entre fracción y división entera. Sabemos que en una fracción impropia la división del numerador por el denominador permite encontrar la parte entera de la fracción. Por tanto, dividiendo 17 entre 8 se obtiene como parte entera 2 y resto 1 lo que nos da el número mixto $2\frac{1}{8}$.

Para calcular cuántas décimas hacemos lo siguiente:

$$\frac{1}{8} = \frac{10}{80} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{8} = \frac{1}{10}(1 + \frac{2}{8}) = \frac{1}{10} + \frac{2}{80}$$

y queda $\frac{17}{8} = 2 + \frac{1}{8} = 2 + \frac{1}{10} + \frac{2}{80}$.

Para saber cuántas centésimas hay en 2/80 volvemos a utilizar el procedimiento anterior:

$$\frac{2}{80} = \frac{20}{800} = \frac{1}{100}\frac{20}{8} = \frac{1}{100}(2 + \frac{4}{8}) = \frac{2}{100} + \frac{4}{800}$$

y resulta $\frac{17}{8} = 2 + \frac{1}{10} + \frac{2}{80} = 2 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{4}{800}$.

Volviendo a hacer lo mismo con la fracción $\frac{4}{800}$ se obtiene:

$$\frac{4}{800}=\frac{40}{8000}=\frac{1}{1000}\cdot\frac{40}{8}=\frac{1}{1000}\cdot 5=\frac{5}{1000}$$

con lo que ya tenemos expresada la fracción inicial en forma decimal:

$$\frac{17}{8}=2+\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{4}{800}=2+\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}=2'125$$

En el desarrollo anterior se produce una división entera entre el numerador y denominador de la fracción y sucesivamente se dividen los restos multiplicados por 10. Esto justifica una segunda técnica de obtención de la expresión decimal de un número decimal expresado como fracción consistente en efectuar la división entera entre numerador y denominador, colocar una coma en el cociente una vez que la división entera ha terminado, añadir un cero al resto y proseguir la división siguiendo este procedimiento hasta obtener resto 0. El cociente obtenido es la notación decimal correspondiente al número decimal.

$$\begin{array}{l|l}
17 & \underline{8\quad\quad} \\
\ \ 10 & 2'125 \\
\quad\ 20 & \\
\quad\quad 40 & \\
\quad\quad\quad 0 &
\end{array}$$

La técnica pone de manifiesto una interpretación del número decimal como cociente exacto de dos números enteros: el numerador y el denominador de una fracción. A la técnica de dividir consistente en añadir ceros a los restos para seguir dividiendo se le llama 'división decimal'.

3.2. Expresión decimal de números racionales no decimales. Expresiones decimales periódicas

Si aplicamos la técnica anterior a números racionales no decimales obtendremos sucesivamente la parte entera, décimas, centésimas, milésimas, etc., correspondientes a la fracción usada como representante.

Con los números racionales no decimales nunca se obtiene resto cero, por lo que la división podría proseguir indefinidamente. Pero como los restos tienen que ser menores que el divisor, sólo existen un número finito de restos diferentes.

Por tanto, en algún momento habrá de repetirse un resto. A partir de ahí, una parte de la división se repetirá. Esto produce un cociente en el que la parte situada a la derecha de la coma se compone de infinitas cifras algunas de las cuales se repiten indefinidamente.

Ejemplo, si dividimos el numerador por el denominador en la fracción 2/11 se obtiene:

$$\begin{array}{l|l}
20 & \underline{11\quad\quad} \\
\ \ 90 & 0'1818 \\
\quad\ 20 & \\
\quad\quad 90 & \\
\quad\quad\quad 2 &
\end{array}$$

si seguimos dividiendo, las cifras 18 se repetirán indefinidamente dando lugar a un cociente con infinitas cifras, 0’18181818181818 ...

Al conjunto de cifras que se repiten se le llama *‘periodo’* y al cociente de la división *‘expresión periódica’*. Dada la imposibilidad de escribir infinitas cifras, las expresiones decimales periódicas se notan escribiendo la parte no periódica y a continuación el periodo con un pequeño arco encima, en el ejemplo anterior $0'\overset{\frown}{18}$.

En una expresión decimal periódica, que corresponde a un racional no decimal, y al igual que en los números decimales, la parte situada a la izquierda de la coma se llama ‘parte entera’ y la parte situada a la derecha ‘parte decimal’.

La representación en un sistema posicional decimal de los números racionales no decimales es siempre periódica. Aunque estos números no son números decimales, podemos obtener números decimales que se aproximen a ellos tanto como queramos.

Ejemplo: el número decimal 0’181 se diferencia del número no decimal $0'\overset{\frown}{18}$ en menos de una milésima. Si esta aproximación no es suficiente, podemos elegir, por ejemplo, el número decimal 0’181818 que se diferencia de $0'\overset{\frown}{18}$ en menos de una millonésima, etc.

Es decir, la representación decimal de un racional no decimal es periódica, pero podemos encontrar un número decimal que represente dicho racional con una cota de error tan pequeña como queramos. Es esta última propiedad la que permite sustituir los cálculos con racionales por cálculos aproximados con números decimales.

3.3. Expresiones decimales periódicas puras y mixtas. Fracción generatriz de los racionales representados por estas expresiones

Cuando la parte decimal de una expresión decimal periódica consiste únicamente en la repetición indefinida del periodo, la expresión decimal se llama *‘periódica pura’*. Si además existe una parte no periódica se dice que la expresión decimal es *‘periódica mixta’*.

Ejemplo: 0’181818... es una expresión decimal periódica pura.
0’43181818... es una expresión decimal periódica mixta.

Llamamos *fracción generatriz* de una expresión decimal la fracción que la genera, es decir, aquella fracción tal que dividido el numerador por el denominador, da lugar a la expresión dada.

- Para hallar la *fracción generatriz de una expresión decimal finita* (que representa por tanto un número decimal), bastará tomar una fracción cuyo numerador es la expresión decimal del número sin la coma y cuyo denominador es la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal.

  Ejemplo: la fracción generatriz del número decimal 23’76 es $\frac{2376}{100}$

- Para hallar la *fracción generatriz de un número cuya expresión decimal es periódica* se multiplica el número por potencias de diez elegidas de tal forma que al restar dos de esas expresiones la parte decimal desaparezca. De ahí se obtiene el valor del número como cociente de enteros.

  Ejemplo 1. Supongamos que queremos encontrar la fracción generatriz de $23'\widehat{102}$. Sea x = $23'\widehat{102}$. Multiplicando x por 1000 obtendremos otro número con la misma parte decimal que x, $1000x = 23102'\widehat{102}$. Restamos las dos expresiones, se obtiene:

  1000x –x= $23102'\widehat{102} - 23'\widehat{102}$

  999x = 23079, de donde se deduce que $x = \frac{23079}{999} = \frac{7693}{333}$ y, por consiguiente, $23'\widehat{102} = \frac{7693}{333}$.

  Ejemplo 2: Si queremos hallar la fracción generatriz del número cuya expresión es periódica mixta $2'67\widehat{5}$. Sea x el número. Multiplicando x por 1000 y por 100 para obtener dos números con la misma parte decimal, obtenemos 1000x = $2'67\widehat{5}$; $100x = 267'\widehat{5}$. Restando se obtiene 900x = 2408, es decir, $x = \frac{2408}{900} = \frac{602}{225}$, con lo cual $2'67\widehat{5} = \frac{602}{225}$.

Observaciones:

1. Los números decimales, como por ejemplo 3/4, que tienen una expresión decimal finita 0’75, se pueden representar también con expresiones decimales periódicas: basta escribir una serie ilimitada de ceros después del 5, 0’7500000 ... También podemos comprobar que se pueden representar como 074999...

2. Incluso los números naturales se pueden expresar con una notación decimal con infinitas cifras decimales; por ejemplo, 1=0’9999...

3. En la práctica, no obstante, los números decimales se expresan de la forma más simple posible, es decir con un número finito de cifras decimales.

4. En cambio todo número racional que no sea decimal, requiere un número ilimitado de cifras en su expresión decimal, que se repetirán en períodos (puros o mixtos).

Todo número racional tiene una representación decimal finita o periódica; todos los números cuya expresión decimal es finita o periódica son números racionales.

5. Más adelante veremos que también se usan “expresiones decimales no periódicas” para los números irracionales (por ejemplo, π = 3'14159 ...)

6. Una desventaja teórica de la expresión decimal es que no es única para los números decimales. Por ejemplo: 2’6 = 2’5999... Los cálculos con números decimales se operan de manera ventajosa si se usa las expresiones decimales finitas.

7. La expresión decimal de los racionales no decimales sí es única, pero las notaciones periódicas para los racionales no decimales son incómodas para operar con ellas o incluso imposibles de realizar.

Ejercicios:

1. Decir si los siguientes racionales son decimales. Para los casos en que sean decimales expresarlos en escritura decimal. Cuando no lo sean dar una aproximación decimal indicando el periodo correspondiente:
28/625; 38/64; 321/600; 36/675; 3/6250; 118/925; 52794/875

2. a) Encontrar una escritura decimal para los siguientes números racionales.
1/13, 1/19, 1/23 1/29, 1/31, 1/37, 1/41
b) ¿Cuál es el período en cada caso?
c) ¿Qué tienen en común los denominadores?

3. Escribir en notación decimal en base 12 el racional $\dfrac{4712_{(10}}{144_{(10}}$.

4. Representar mediante una fracción irreducible los racionales decimales siguientes:
1’04; 2’581; 0’0372; 10^{-5}; 0’0005

5. Representar mediante una fracción irreducible los racionales no decimales siguientes:
0’333...; 0’00666...; 0’123123...; 123’458888...; 0’346666...

4. LA INTRODUCCIÓN DE LOS DECIMALES A PARTIR DE LA MEDIDA[4]

Los números decimales se introducen habitualmente a partir de las medidas con diferentes unidades –generalmente de longitud: metros, decímetros, centímetros, milímetros. Los múltiplos y submútiplos de la unidad elegida, por ejemplo, el metro (m), se representan en forma decimal, insistiendo en las multiplicaciones o divisiones por 10 que relacionan unos con otros. La “expresión decimal” aparece como un medio cómodo de representar medidas complejas.

Ejemplo: “2 dam, 3 m, 1dm y 3 cm”, se conviene en expresarlo como 23’13 m si se ha elegido el metro como unidad principal, mientras que se escribe como 231’3 cm si se elige el centímetro.

Esta introducción sólo requiere nociones con las que los niños están familiarizados, como cantidades de longitud y sus distintas unidades de medida. Permite también plantear el problema de los ceros necesarios y los que no lo son, una de las primeras diferencias entre los enteros y los decimales.

Los ceros a la izquierda de un número entero se pueden suprimir (04 = 4), pero son indispensables si están a la derecha de la coma, ya que indican el rango de las restantes cifras en la escritura de un decimal (indican el orden de los submúltiplos de la unidad).

Ejemplo: 8 cm se expresan en metros como 0’08 m, o como 0’00008 km.

[4] Maurin y Johsua (1993), pags. 154-56.

Esta regla es inversa de la que rige para los enteros; en ellos los ceros de la derecha son los que indican el rango de las cifras no nulas, y no se pueden suprimir: 60 y 600 no representan el mismo entero, 0'6 y 0'60 o 0'600 sí representan el mismo decimal.

La introducción de los números decimales en el contexto de la medida tiene el inconveniente de presentar los decimales como números que *podrían ser enteros siempre que se tome una unidad suficientemente pequeña*. Esto enmascara una de las diferencias esenciales entre los enteros y los decimales, que es precisamente la principal utilidad de los decimales: la propiedad de que el conjunto D de los decimales es denso, o sea, que

> entre dos números decimales distintos, siempre se puede encontrar otro decimal distinto y, por tanto, existen una infinidad de tales números decimales intermedios.

El desconocimiento por parte de los niños de esta propiedad puede explicar las dificultades que tienen para proponer números comprendidos entre dos decimales.

Ejemplo: Los niños pueden proponer 1'215 como número decimal comprendido entre 1'21 y 1'22 si interpretan estos números como medidas expresadas en centímetros (1'215 supone pensar en términos de milímetros). Pero tendrán dificultades para proponer otro número entre 1'215 y 1'216, ya que no conocen unidades inferiores al milímetro. Desligando los números decimales del contexto de medida resulta fácil encontrar números entre 1'215 y 1'216: basta escribir 1'215 y 1'216 como 1'21500 y 1'21600 para encontrar rápidamente 99 números intermedios.

La propiedad de la densidad del conjunto de los números decimales D atribuye a estos números otras características importantes y diferentes respecto de los números enteros:

- Dado un decimal, no existe otro que le preceda o que le siga.
- Tampoco existe en un intervalo abierto (5, 6) un número decimal menor o mayor que todos los comprendidos en dicho intervalo.

Otro *obstáculo* en la comprensión de la representación decimal nace de la manera en la que se habla de ella: primero se pronuncia la parte entera y después la parte decimal. Por ejemplo, 256'431 se pronuncia como "doscientos cincuenta y seis, coma, cuatrocientos treinta y uno"; o también, "doscientos cincuenta y seis unidades, cuatrocientos treinta y un milímetro". Esta práctica lleva a pensar en la representación decimal como dos números enteros separados por una coma, lo que puede explicar ciertos errores en la comparación de números expresados en forma decimal.

- Cuando se quieren comparar dos números decimales la comparación de las partes enteras proporciona un método eficaz y correcto cuando las partes enteras son diferentes. Por ejemplo, 247 "y algo más" es mayor que 246 "y algo más".
- Si las partes enteras son iguales se corre el riesgo de aplicar este mismo procedimiento para comparar las partes decimales, lo que no es en general correcto. Así 247'5 es mayor que 247'123, a pesar de que 5 es menor que 123.
- La aplicación del "orden lexicográfico" en la comparación de enteros y decimales requiere que los números tengan las mismas cifras, lo que en el caso de los

decimales se logra completando con ceros. Así, para la comparación de 247’5 y 247’123 debe hacerse expresando 247’5 como 247’500; de este modo se ve claramente que 500 > 123.

A pesar de estas dificultades, la comparación de racionales expresados mediante notación decimal es más sencilla que usando la notación con fracciones.

5. OPERACIONES CON NÚMEROS DECIMALES

El gran interés de la notación decimal se deriva de que todos los algoritmos desarrollados para realizar las operaciones aritméticas se extienden casi sin problema al conjunto D de los decimales. Esto es posible gracias a las propiedades del sistema de numeración decimal.

5.1. Adición y sustracción

El procedimiento consiste en transformar los dos números decimales para que tengan el mismo número de cifras después de la coma, añadiendo ceros a la derecha del número que tenga la parte decimal más corta. De esta manera, si se disponen los dos números en columnas, la coma debajo de la coma, sólo queda aplicar el algoritmo habitual de la adición o de la sustracción en N. De esta regla puede surgir el obstáculo de considerar los decimales como “dos enteros separados por la coma”,

Ejemplo:

$$205'8 \pm 174'402 = 205'800 \pm 174'402 \,,$$

y se aplica el algoritmo como para dos números enteros de seis cifras. Se comienza por la última cifra de la derecha de la parte decimal, y se deja la coma en su lugar entre la tercera y la cuarta columna.

La justificación de esta manera de proceder se puede hacer pasando los decimales a las fracciones correspondientes.

5.2. Multiplicación

El procedimiento consiste en realizar la multiplicación de los dos números como si fueran enteros, prescindiendo de la coma, para colocar finalmente la coma en el producto contando (a partir de la derecha) el número de cifras igual a la suma de las cifras de las partes decimales de los dos factores.

La realización de estos cálculos muestra a los niños que “la multiplicación no siempre hace aumentar” a los números, por ejemplo: 5’3 . 0’2 = 1’06

La justificación de este modo de operar la proporciona el sistema de numeración decimal:

$$5'3 = 5 + 3.10^{-1}$$
$$0'2 = 2.10^{-1}$$
$$5'3 \,.\, 0'2 = [5 + 3.10^{-1}].\ [2.10^{-1}] = 10.\ 10^{-1} + 6.\ 10^{-2} = 1'06$$

Se ha aplicado la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición, la fórmula del producto de dos potencias de igual base y la escritura polinómica de los decimales.

Se puede justificar este algoritmo sin utilizar las operaciones con exponentes negativos. En primer lugar, es necesario aprender a multiplicar y dividir por potencias de la base 10. Se observará especialmente las consecuencias de estas operaciones sobre el desplazamiento de la coma.

A continuación es necesario aprender a escribir los números decimales como fracciones o divisiones (si antes no se han introducido los racionales):

5’3 = 53/10; o bien, 5’3 =53:10 =53.0’1

Esto equivale a explicitar la idea de que multiplicar por 0’1 es como dividir por diez. Finalmente es necesario recordar la definición del producto para mostrar que una décima por una décima da como resultado una centésima –propiedad que se habrá tratado antes, si ya se han abordado los racionales.

Después de esto se podrá escribir:

5’3 x 0’2 = (53 x 0’1) x (2 x 0’1) = (53 x 2) x (0’1 x 0’1) = 106 x 0’01

5.3. División

La división de dos decimales se puede reducir siempre a la de un dividendo decimal y un divisor entero, ya que si el divisor tuviera decimales se puede transformar en entero multiplicando por la potencia de diez conveniente ambos números.

El algoritmo que se aplica es el mismo que el de la división entera. Se traslada la coma al cociente cuando se la encuentra en el dividendo. Cuando se agotan las cifras del dividendo se continúa la división “bajando ceros” ¿Cuándo se debe detener este proceso? Esto plantea el problema de la aproximación decimal.

Ejercicios:

6. Calcular la diferencia, 1’$\underline{53}$- 0’$\underline{716}$.

6. Calcular los productos:
   a) 0’$\underline{93}$ x 0’4 b) 0’$\underline{495}$ x 0’

8. Sumar 0’$\underline{6}$ + 0’$\underline{3}$. ¿La suma de dos números decimales periódicos, es siempre un decimal periódico?

9. Estima el producto $7.123 \text{x} 10^5$ x $2.124 \text{ x} 10^5$ y comprueba la respuesta con tres cifras significativas usando una calculadora.

6. LA APROXIMACIÓN DECIMAL DE RACIONALES. NÚMEROS REALES

Los racionales decimales admiten una expresión decimal finita. Basta realizar la división del numerador por el denominador de la fracción irreducible que lo representa para obtenerla. Si el racional no es decimal admite una expresión decimal, pero tenemos que utilizar una serie ilimitada de números (2/3 = 0’6666...) a la derecha de la coma, números que se repiten a partir de un cierto momento.

El hecho que hace a los números decimales útiles es que permiten “aproximar” con el grado de precisión que deseemos a cualquier número racional. Para ello basta truncar la serie ilimitada de la expresión decimal periódica en un punto más o menos alejado a la derecha de la coma; de este modo se obtiene un decimal finito que aproxima al decimal infinito cuanto queramos.

Desde un punto de vista práctico, por tanto, se puede evitar siempre el uso de expresiones decimales infinitas realizando los cálculos con aproximaciones decimales finitas. Esta propiedad se expresa diciendo que D es denso en Q:

> Hay un número decimal tan próximo como se quiera a cualquier número racional

Ejercicios*:*

10. Encontrar un decimal con dos cifras decimales que esté a menos de una centésima del número 1/3

11. Encontrar un decimal con tres cifras decimales que difiera de 15/7 menos de una milésima. Expresar el resultado en forma polinómica.

Números irracionales:

Existen números cuya expresión decimal es infinita y no periódica. Por ejemplo, imaginemos la siguiente expresión decimal potencialmente infinita:

0’717117111711117 ...

donde, después de cada número 7, se va poniendo sucesivamente un número 1 adicional. Por tanto, no será posible encontrar aquí ninguna periodicidad.

Es decir, podríamos imaginar la siguiente sucesión de números decimales finitos, ordenados de menor a mayor:

0’7 < 0‘71< 0’717 < 0’7171<0’71711< ...

Esta sucesión no crece ilimitadamente, ya que está acotada por 0’72. Por otra parte, por muchos términos que escribamos no podemos encontrar un racional al que corresponda la expresión, ya que ni es finita ni periódica.

> Llamamos *números irracionales* a aquellos cuya representación decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas. Por tanto un *número irracional* surge como resultado de continuar potencialmente una sucesión acotada de números decimales.

Como vemos en este ejemplo, los números decimales permiten también manejar aproximaciones finitas, con el grado de aproximación que deseemos, de los números irracionales.

Llamaremos conjunto de *números reales* al conjunto que se obtiene al unir los números *racionales e irracionales*.

> “*Número real*” es una manera abreviada de referirnos a las sucesiones estrictamente crecientes o decrecientes acotadas de números decimales.

Ejercicios:

12. Entre dos números reales cualesquiera hay un número decimal finito (D es denso en R). Encontrar un número decimal finito entre los siguientes números reales:
 a) π y $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{99}$ y $\sqrt{100}$

13. Probar que la escritura decimal siguiente no corresponde a un número racional:
 0'12345678910111213141516171819 20 21.....

7. NOTACIÓN CIENTÍFICA. REPRESENTACIÓN DECIMAL EN LAS CALCULADORAS

Cualquier número expresado en forma decimal se puede escribir como producto de un número comprendido entre 1 y 10 y una potencia entera de 10. Por ejemplo:

$$2305 = 2'305.10^3; \quad 0'0321 = 3'21.10^{-2}; \qquad 7'4 = 7'4.10^0;$$

Esta manera de escribir los números se conoce como notación científica, o también *coma flotante normalizada*. La forma general es: $d.10^n$, siendo *d* un número decimal comprendido entre 1 y 10, y *n* la potencia necesaria para situar la coma en el lugar que corresponda según el número representado.

Es particularmente conveniente para expresar números muy grandes o muy pequeños, y es la utilizada en las calculadoras un poco sofisticadas (calculadoras científicas). Basta sólo mostrar en la pantalla el número *d* y el exponente *n*, ya que la base 10 de la potencia se sobreentiende.

Ejemplos:
$-542'2568 = -5'422568.\ 10^2$, se muestra como, -5'422568 02
$0'000005689 = 5'689.10^{-6}$, se muestra como, 5'689 -06

El uso de la notación científica en las calculadoras es una necesidad derivada del hecho que las pantallas de estos dispositivos sólo pueden mostrar un número pequeño de dígitos (8 o 10 cifras, por lo general). Sin estos convenios de representación sería imposible hacer el siguiente cálculo:

0'000 000 005 872 x 0'000 000 000 025 8

ya que daría como resultado 0'00000000 en una calculadora con 10 posiciones de memoria en la pantalla.

Sin embargo, en notación científica el resultado se daría como:

1'514976 -19, que significa,

$1'514976 \times 10^{-19} = 0'000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 151\ 497\ 6$

lo que permite dar todas las cifras significativas del cálculo.

Conviene tener en cuenta que en las calculadoras la coma decimal se indica con un punto, y no con una coma o con un apostrofe (') como suele ser habitual en la escritura a mano.

Ejercicios

14. Efectuar los siguientes cálculos sin calculadora. Comprobar los resultados usando la calculadora.

a) 0'85 + 0'2; b) 0'002 + 0'32 +1'5; c) 6'801 - 0'999;
d) 2'8 x 0'49; e) 0'003 x 0'002; f) 0'0'48 ÷ 6
g) 0'048 ÷ 0'6; h) 0'048 ÷ 0'06; I) 0'048 ÷ 0'000006
j) 0'22459 ÷ 0'037 k) 0'015989 ÷5'9

Buscar situaciones concretas en las que sea necesario hacer cada una de estas operaciones.

15. Una calculadora da el valor 0'0000001 como respuesta para la multiplicación 0'00037 x 0'00054.

a) ¿Cuál es la respuesta correcta?
b) ¿Cómo se puede hallar la respuesta correcta con la calculadora?
c) Otra calculadora da como respuesta 1998 -07. Interpretar esta respuesta.

8. TALLER MATEMÁTICO

1. Escribir en forma simplificada como "número con coma" las siguientes expresiones de dos números expresados de forma polinómica en base b >6. ¿Cuál de ellos es mayor?

$d_1 = 2b^2 + 0b^1 + 1b^0 + 5b^{-1} + 1b^{-2} + 6b^{-4}$

$d_2 = 2b^2 + 0b^1 + 1b^0 + 5b^{-1} + 6b^{-3}$

2. Dar la escritura decimal, eventualmente aproximada, de los números que se escriben del siguiente modo:

214'23 (en base cinco) y 214'23 (en base seis)

3. Si escribimos los números racionales en un sistema de base 12,

a) ¿Qué fracciones podrán escribirse con una escritura "duodecimal" finita?
b) ¿Qué fracciones tendrán una escritura "duodecimal" ilimitada periódica?
c) ¿Qué fracciones tendrán una escritura duodecimal ilimitada no periódica?

4. Si al usar la calculadora para dividir 4 entre 9 obtienes como resultado 0.4444444, ¿significa eso que 4/9 es un número racional con expresión decimal periódica?

5. Escribe las siguientes fracciones en expresión decimal:

1/11
1/111
1/1111

¿Puedes adivinar la expresión decimal de 1/11111? Comprueba tu conjetura hallando su fracción generatriz.

Describe la expresión decimal de 1/N donde N el un número formado por n unos: 111…..1

6. ¿Cuáles son las fracciones generatrices de las siguientes expresiones?

0'7474747474...
0'235235235235...
0'ababababab...
0'abcabcabc...

C: Conocimientos Didácticos

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

Los números decimales se han convertido en los últimos años en protagonistas de todos los cálculos -hasta el punto de que en la práctica desplazan completamente a las fracciones - debido a la disponibilidad creciente del uso de calculadoras y de ordenadores que hacen las operaciones con ellos (Centeno, 1988, p. 17).

Los símbolos 3.75 y $3\frac{3}{4}$ representan la misma cantidad, aunque tengan un aspecto tan diferente. Esta apariencia hace que para los niños, el mundo de las fracciones y el de los decimales sean muy distintos. Incluso las personas adultas tienden a pensar en las fracciones como conjuntos o regiones (tres cuartos *de* algo, por ejemplo), mientras que consideran los decimales más como números. La realidad es que las fracciones y los decimales son dos formas diferentes para representar las mismas ideas, o si se prefiere para describir y manipular el mismo tipo de situaciones.

Uno de los fines principales de la enseñanza de las fracciones y decimales será que los estudiantes vean ambos sistemas notacionales como modos de representar los mismos conceptos, aunque ciertamente con ventajas distintas según las situaciones. Por ejemplo, en muchos contextos, es más fácil pensar sobre 3/4 que en 75 centésimas o 0.75. Inversamente, el sistema decimal hace más fácil la expresión de números que están próximos a 3/4, como 0.73, o 0.78. El uso del sistema decimal es claramente ventajoso en dispositivos digitales, como calculadoras, ordenadores y mediciones electrónicas[5].

1.1. Diseño Curricular Base del MEC

En el Decreto del MEC (BOE 26-6-91) se mencionan los números decimales en los siguientes términos en el apartado de *conceptos*:

- Números fraccionarios y decimales

Estas orientaciones curriculares fueron formuladas de manera más explícita en el DCB (Documento Curricular Base, MEC, 1989). Entre los objetivos generales que hacen referencia al estudio de los "Números y operaciones" se incluyen las siguientes indicaciones.

Hechos conceptos y principios:

• Correspondencias entre fracciones sencillas y sus equivalentes decimales.

En el apartado de *procedimientos*:

2. Comparación entre números naturales, decimales (de dos cifras decimales) y fracciones sencillas mediante ordenación, representación gráfica y transformación de unos en otros.

[5] Van de Walle (2001), p. 243.

15. Automatización de los algoritmos para efectuar las operaciones de suma y resta con números decimales de hasta dos cifras y con fracciones de igual denominador.

1.2. Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM 2000)[6]

En los Estándares Curriculares y de Evaluación del NCTM (1989) las orientaciones curriculares son algo más explícitas. Concretamente se dice que en los niveles P-4 (Infantil a 4º curso de Primaria), los niños empiezan a encontrarse con decimales en multitud de situaciones -con calculadoras y medidas métricas, en tablas de datos, y en actividades cotidianas como el uso de un cronómetro digital. Por tanto, el currículo tiene que hacer énfasis en el desarrollo de conceptos decimales.

Continúan diciendo que el enfoque de los decimales ha de ser parecido al trabajo con fracciones, es decir, hacer hincapié de forma clara y continua en modelos y en lenguaje oral y más tarde conectar este trabajo con los símbolos. Esto es necesario si se quiere que los decimales tengan sentido para los estudiantes y que éstos hagan de ellos un uso intuitivo. Al explorar la idea de décimas y centésimas partes con modelos puede incluirse un trabajo previo con decimales equivalentes, recuento de sucesiones, comparación y ordenación de decimales, y suma y resta.

La enseñanza y el aprendizaje de los decimales ha de incluir experiencias informales que establezcan la relación entre fracciones y decimales para que los estudiantes comiencen a establecer una conexión entre los dos sistemas. Por ejemplo, si los estudiantes reconocen que 1/2 es la misma cantidad que 0'5, pueden usar esta relación para determinar que 0'4 y 0'45 son un poco menos que 1/2 y que 0'6 y 0'57 son un poco más que 1/2. Las actividades de este tipo ayudan al niño a dotar de significado a los números decimales.

En los Principios y Estándares 2000 (NCTM, 2000) aparecen los decimales en los siguientes términos:

Grados 3-5:

- comprender la estructura posicional del sistema de numeración decimal y ser capaz de representar y comparar números naturales y decimales;
- reconocer y generar formas equivalentes de fracciones, decimales y porcentajes usados comúnmente.

Ejercicio:

1. Analizar las diferencias y semejanzas en las orientaciones curriculares siguientes respecto del estudio de los números decimales,

- Diseño Curricular Base del MEC
- Las orientaciones curriculares de tu país o Comunidad Autónoma
- Principios y Estándares 2000 del NCTM.

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

Los números decimales empiezan a utilizarse en 4º nivel de primaria generalmente en un contexto de medida. Por ejemplo, la expresión decimal 1'25 m es una manera

[6] National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standard for School Mathematics*. Reston: Va: NCTM.

sencilla y cómoda de decir que al medir el largo de una mesa se ha necesitado un metro, 2 decímetros y 5 centímetros. La multiplicación de un número natural por un decimal, como 4 x 0'37, se asocia con la suma reiterada: 0'37 + 0'37 + 0'37 + 0'37.

En cursos superiores se encontrarán con problemas que llevan a multiplicar, por ejemplo números como 0'37 x 0'37, sin que estos números se interpreten como medidas. Los momentos más delicados del proceso de enseñanza - aprendizaje son aquellos en los que las propiedades tanto de los números como de las operaciones con los números naturales no pueden extenderse a los números decimales[7].

La comprensión de la relación entre las fracciones y su escritura decimal es similar a la comprensión de la relación entre diferentes sistemas de numeración, por ejemplo entre el sistema de numeración romana y el posicional decimal. El niño debe comprender que en ambos casos el número representado es el mismo y lo que cambia es la forma de representarlo.

En principio, para los niños será más fácil comprender la idea de fracción, a través de sus diferentes representaciones, como la relación parte-todo que su expresión decimal. Pero a la larga esta comprensión tendrá una gran ventaja en los algoritmos y resolución de problemas.

Para iniciar con éxito el estudio de la representación decimal de las fracciones es necesario que el niño tenga soltura y comprensión en los convenios del sistema decimal de representación de los enteros y comprenda el principio del valor de posición. Asimismo debe comprender los diversos significados subyacentes a la fracción decimal, por ejemplo "dos décimas", que estudiamos en la lección anterior para poder dotar de significado a la parte decimal del número.

Dado que la representación decimal de un número se basa en la noción de fracción (décimas, centésimas, milésimas), la comprensión de la equivalencia tiene la misma importancia al estudiar decimales que al estudiar fracciones. Por ejemplo, hay niños que tienen dificultad en encontrar equivalentes 2 décimas a 20 centésimas, es decir, 0'2 a 0'20. Algunos niños consideran que 0'20 es mayor.

Conflictos en el aprendizaje de los números decimales

La escritura decimal de los números ha producido confusiones entre lo que es un número decimal y lo que no es un número decimal, identificando más al número decimal por su escritura decimal que por sus propiedades intrínsecas, lo que ha originado cierta ambigüedad entre la escritura decimal y el número decimal, de tal manera que decimal está asociado a números con comas en contraposición al número entero o número sin comas; esta acepción del término decimal es origen de diferentes errores[8].

Los errores más frecuentes, observados de manera persistente, tras el estudio del tema por los alumnos de primaria y primer ciclo de secundaria son clasificados y descritos por Centeno (1988) en cuatro apartados. Indicamos algunos ítems usados en evaluaciones con ejemplos de respuestas erróneas.

Errores relacionados con la lectura y escritura de los números: valor de posición

Item 1. ¿Cuál de los números siguientes es 37 milésimas? 0'037; 0'37; 37; 37000.

En algunas investigaciones el 88% de los niños de nueve años y el 40% de los de trece responden 37000. Parece que una buena parte de los alumnos de estas

[7] Centeno (1988), p. 151.
[8] Socas (2001).

edades interpreta centésimas como enteros, y piensan que para que haya milésimas tiene que haber tres ceros.

Item2. Se pide a los alumnos que cuenten por centésimas.
Es fácil obtener la respuesta siguiente: 14’08; 14’09; 15.

Item 3. Seis décimas se escribe 0’6 como decimal. ¿Cómo escribes tres centésimas?.
Algunas respuestas erróneas obtenidas son: 0’300; 3’00; 3’0; 3’100; 00’3; 0’3. Puesto que la base de la escritura de números decimales es el sistema de numeración decimal, no se puede esperar que los niños comprendan la escritura de los decimales menores que la unidad mientras no esté bien comprendido el dominio del sistema de numeración decimal para la escritura de los números enteros.

Errores relacionados con el cero

Algunos alumnos ignoran el cero e interpretan 0’036 como 36, perdiendo la estructura global del número y tratándolo sólo como un número entero. 1’27 se considera distinto de 1’270.

Errores en la interpretación de decimales como fracciones

Item 4. Escribe una fracción para completar la igualdad 6’28= 6x1+2x ___ + 8x1/100
El porcentaje de niños que realizan correctamente este ejercicio no llega a veces al 10 % de los niños de 13 años.

Errores relacionados con las operaciones
A continuación mostramos respuestas de niños a algunas tareas. Identifica y explica los errores cometidos.

1) 0’7 + 0’4 + 0’2 = 0’130; 17’3 + 21’8 = 38’11
2) Hacer el número 437’56 diez veces mayor. Respuesta: 437’560
3) 3’15 x 10 = 30’150
4) 3’15 x 10 = 3’150
5) 2’3 x 2’3 = 4’9
6) 4 x 2’3 = 8’12
7) 2’12 : 2 = 1’6

Una parte importante de los alumnos piensa que al multiplicar dos números siempre se obtiene otro número mayor que los dados, y que al dividir se obtiene uno menor.

3. SITUACIONES Y RECURSOS

3.1. Introducción del uso de la coma decimal en el contexto de la medida de longitudes

El estudio de la medida de longitudes puede ser una buena oportunidad para introducir el uso de la coma decimal, como convenio de expresión de la medida de un objeto realizada, por ejemplo, con varias unidades como decímetros, centímetros y milímetros (medida compleja).

En el transcurso de una situación de medida de bandas de longitudes dadas, usando, bien la regla graduada, o bandas de 1dm y 1cm, los alumnos pueden obtener resultados como: 2dm y 5cm.

¿Cómo podemos expresar este resultado usando como única unidad el dm?

Después de animar a los niños a proponer sus propias soluciones se puede introducir el convenio del uso de la coma: 2 dm 5 cm = 2' 5 dm

Como ejercicio complementario podemos pedir que los niños expresen con decimales medidas tales como:

25 cm 6 mm: unidad elegida: el cm $\rightarrow$
unidad elegida: el dm $\rightarrow$
unidad elegida: el m $\rightarrow$

La misma actividad con: 14 m 4 cm.

Los niños estarán contentos de haber aprendido a escribir los "números con coma". Muchos recuerdan los precios que han visto en los almacenes y piden otros ejercicios. Es evidente que los niños no dominan todavía el empleo de la coma. Es necesario un gran número de actividades en campos diferentes (precios, pesos, capacidades, etc) para lograr ese dominio[9].

3.2. Modelos gráficos y concretos para representar fracciones decimales[10]

La figura 1 muestra un dispositivo que permite representar, mediante un modelo de áreas, décimas y centésimas. Cada disco está dividido en diez partes iguales mediante diámetros; cada una de las partes corresponde a una décima. A su vez cada sector circular de una décima está dividido mediante 10 marcas igualmente espaciadas en los bordes, quedando representadas las centésimas. Cada disco se corta a lo largo de un radio; esto permite encajar dos de tales discos, como se muestra en la figura, con lo cual se puede mostrar cualquier cantidad de centésimas. En el ejemplo, la región sombreada, intersección de dos discos, representa 25 centésimas (25/100 = 0’25)

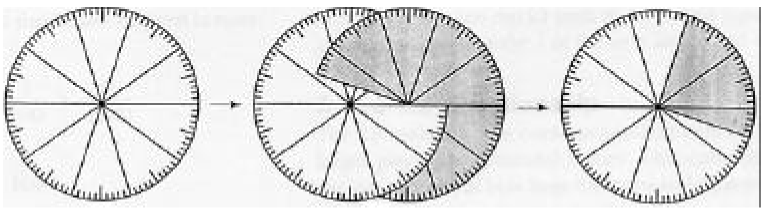


Figura 1: Discos de décimas y centésimas

La representación más común de las fracciones decimales, y por tanto, para las décimas y centésimas, es una cuadrícula de 10 x 10, como se muestra en la figura 2 a). Los cuadrados se pueden reproducir en cartulina o papel para que los alumnos puedan rayar la fracción deseada. El decimal 2’13 quedará representado con dos cuadrados completos (2 unidades enteras) y sombreando 13 cuadrados pequeños. Una variante de

[9] Nadine Brousseau (1992).
[10] Van de Walle (2001).

este material es el representado en la Fig. 2 b), en la cual la unidad será representada por el cuadrado de 10 x 10, la décima por la banda de 10 cuadraditos y la centésima por cada cuadradito. En la figura se representa, por tanto, el decimal 1'36.

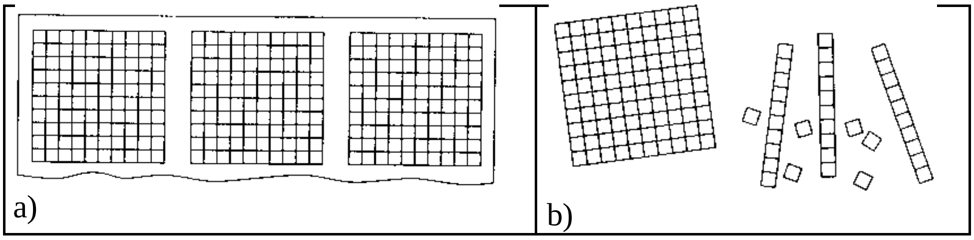


Figura 2: Cuadrículas de 10 x 10

Los bloques multibase, de base 10, con bloques, placas, varillas y cubos pequeños permiten representar hasta las milésimas, si consideramos que el bloque mayor es la unidad.

Modelos lineales

Una buena representación material de las fracciones decimales es el metro de varillas plegables, con divisiones en los decímetros, centímetros y milímetros.

3.3. Conexión entre fracciones y decimales[11]

Para comprender la relación entre los dos sistemas de representación, fraccional y decimal, los alumnos deberán realizar actividades de traducción entre ambos.

En la figura 3 se muestra la fracción decimal 35/100 mediante el modelo lineal y de áreas, en el formato circular y cuadrangular. Las tres bandas que representan las décimas y los cinco cuadraditos se han dispuesto en una tabla con columnas diferenciadas para las unidades, décimas y centésimas (casillero o franja de valor de posición).

Esta actividad comienza con una fracción decimal y se traduce a expresión decimal; también se debe proceder de manera inversa: Comenzar con una expresión decimal y traducirla a expresión fraccional, usando tanto el lenguaje escrito, oral y distintos modelos gráficos.

[11] Van de Walle (2001).

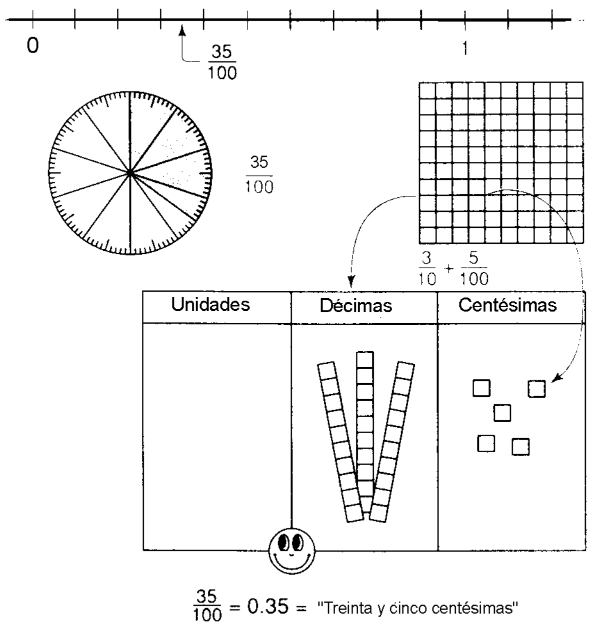


Fig. 3: Traducción entre expresiones fraccionales y decimales

3.3. Ordenación de decimales

La ordenación de decimales resulta difícil para los alumnos de primaria debido a las diferencias importantes entre el orden de los números racionales y los naturales. Por ejemplo, si pedimos que identifiquen el número mayor entre los siguientes: 0'36, 0'058, 0'375 y 0'4 , a alumnos de 12-13 años podemos encontrar que alrededor de la mitad de los alumnos dan respuestas erróneas. El error más frecuente suele ser elegir el número con mayor número de dígitos, siguiendo el criterio que se aplica con los números naturales.

Los siguientes tipos de situaciones pueden facilitar la discusión en clase sobre el tamaño relativo de los números decimales[12].

Situación 1:

Presentar dos números decimales. Pedir a los alumnos que digan cuál es el mayor y que expliquen su elección con ayuda de modelos gráficos o concretos (metro, tablero de 10 x 1)

Situación 2:

Escribir un número con cuatro dígitos decimales, por ejemplo, 3'0917.

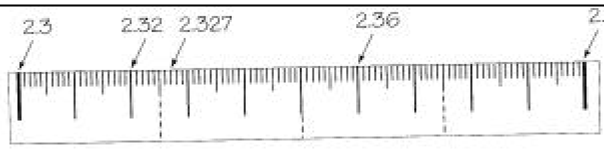
- ¿Qué número está más próximo, el 3 o el 4?
- ¿Qué número está más próximo el 3'0 o 3'1?

Repetir las preguntas con las centésimas y las milésimas.

En cada respuesta, pedir que los alumnos justifiquen sus respuestas, ayudándose si lo creen necesario con modelos gráficos o concretos.

Un modelo de recta numérica grande sin numerar, pegada en la pizarra, puede ayudar en la validación de las respuestas.

[12] Van de Walle (2001).



Situación 3:
Preparar una lista de cuatro o cinco números decimales que los alumnos tengan dificultades en ordenar, de manera que estén entre dos números naturales consecutivos. Pedir que los ordenen de menor a mayor. A continuación pedir que los representen sobre la recta numérica con cien subdivisiones, como la mostrada en la figura anterior.
Como variante, pedir que sombreen cada decimal en una cuadrícula 10x10 usando estimaciones para las milésimas y diezmilésimas.

3.4. Operaciones aritméticas con decimales

El papel de la estimación

Se considera importante que los alumnos aprendan a realizar estimaciones del resultado de los cálculos con decimales antes de realizarlos aplicando las técnicas de papel y lápiz. Para muchos cálculos con decimales se puede encontrar estimaciones razonables simplemente redondeando los números hasta los enteros más próximos o a fracciones decimales sencillas. En casi todos los casos, un objetivo plausible puede ser que los alumnos consigan encontrar de manera exacta la parte entera del resultado. Por supuesto que se deben proponer tareas de estimación con números relativamente sencillos.

Adición y sustracción de decimales

Se debe procurar seleccionar situaciones-problemas en las que tenga interés y sentido práctico la realización de las operaciones con cifras decimales. Por ejemplo,

Problema 1: Tenemos que colocar un rodapié en una habitación rectangular. Las dimensiones de la habitación son 3'90 m de largo y 2'65 m de ancho. ¿Cuántos metros de rodapié debemos comprar?

Problema 2: Dos amigos A y B cronometran el tiempo que tardan en correr un kilómetro. A dice que tarda 74'5 segundos. B es más preciso, y dice que tarda 81'34 segundos. ¿Cuántos segundos tarda B más que A?

Problema 3: Un carpintero debe hacer un soporte para un canalón de un tejado que tiene 2'9 m de largo. Dispone de cinco planchas de madera y debe elegir las que le convienen porque no quiere subirlas todas al tejado. Las planchas miden, respectivamente,

1 m   1'57 m   1'1 m   1'33 m   0'3 m

¿Qué planchas debería subir al tejado?

Se pedirá a los alumnos hacer previamente estimaciones de los resultados y después que apliquen sus propias técnicas de cálculos con papel y lápiz. Los alumnos decidirán qué método es mejor y por qué, llegando a la conclusión de que el método mejor es el que permita dar el resultado correcto lo más pronto posible. En general, el mejor método será operar como si fueran enteros, pero teniendo en cuenta la colocación de las unidades cuyo lugar se señala con la coma.

Multiplicación y división de decimales

Cualquiera de las situaciones de adición puede modificarse para que conduzca a una situación que da sentido a la multiplicación de un decimal por un entero. Por ejemplo[13], en el caso de las planchas de madera se puede suponer que el carpintero tiene tres tipos de planchas: 5 planchas de 0'58 m; 3 planchas de 1'44; 1 plancha de 0'95 m. Debe conseguir las sumas: 3'85; 2'32; 5'27; 6'37. El cálculo del área de rectángulos cuyos lados tienen medidas decimales es un tipo de situación que permiten atribuir significado al producto de dos decimales.

Las situaciones que permiten dar significado a la multiplicación se pueden utilizar también para atribuir significado a la división. Dividir se puede presentar siempre como encontrar el término desconocido de una multiplicación. Por ejemplo, dividir 6'4 entre 0'4 consiste en encontrar un número d (que en este caso es 16) tal que 6'4 = 0'4 x d.

En el contexto de cálculo de áreas de rectángulos, si fijamos un área y conocemos uno de los lados, la determinación del otro lado conduce a la división.

En otras situaciones la división aparecerá como el resultado de una aplicación recíproca entre magnitudes. Por ejemplo[14], si 1 kg de naranjas produce 2/3 de litros de zumo, ¿cuántas naranjas producirán 6 litros de zumo?.

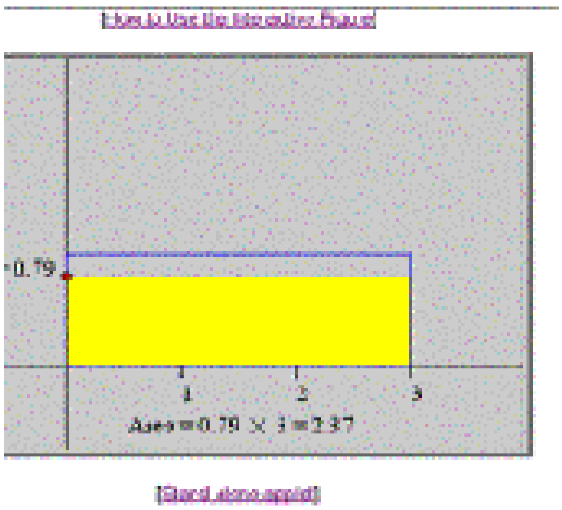
El aprendizaje de los algoritmos de papel y lápiz de la multiplicación y división de números decimales, dada la disponibilidad de calculadora, puede ser una pérdida de tiempo. Usando la calculadora los alumnos pueden descubrir para la multiplicación y división de números decimales la siguiente regla heurística:

> "Ignorar las comas decimales, y hacer el cálculo como si los números fueran enteros. Finalmente, colocar la coma decimal usando la estimación previa del resultado".

Remitimos al lector al capítulo 11 del libro de Centeno (1988) en el que se describe una amplia y cuidada selección de situaciones y recursos para la enseñanza de los decimales en primaria y primer ciclo de secundaria.

[13] Centeno (1988, p. 197).
[14] Centeno, 1988, p. 205.

3.5. Recursos en Internet

Multiplicación por números mayores y menores que la unidad http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap6/6.1/index.htm#applet


Descripción

Se calcula la multiplicación del número 3 por un número decimal mayor o menor que la unidad. Los resultados se interpretan como el área de un rectángulo de base 3 y altura el multiplicador (y). Los valores de y se introducen de manera analógica desplazando verticalmente el punto correspondiente. El área del rectángulo de base 3 y altura unitaria se compara con el área de los sucesivos rectángulos de altura y.

Ejercicio 2:

1. ¿Cuáles son los conocimientos matemáticos que se suponen conocidos para usar este programa? ¿Qué conocimientos sobre el programa se deben aprender para usarlo como recurso didáctico?
2. ¿Cuáles son los nuevos conocimientos matemáticos pretendidos? ¿Cuál es su naturaleza? (adquisición de una destreza, reconocimiento de una propiedad y su justificación, etc.)
3. Describir un recurso didáctico alternativo para el estudio de los conocimientos pretendidos (p.e., uso de la calculadora, papel y lápiz, etc.). Indicar las ventajas relativas de cada recurso.
4. Diseñar una unidad didáctica para el estudio del contenido pretendido, apoyada en el uso de este recurso, indicando:
   - las consignas que se darán a los alumnos,
   - las explicaciones complementarias que se consideren necesarias sobre el uso del recurso y recuerdo de conocimientos previos,
   - uso de recursos complementarios,
   - posibles explicaciones finales para sistematizar los conocimientos pretendidos.

4. TALLER DE DIDÁCTICA

4.1. Respuestas de estudiantes a una prueba de evaluación

Las siguientes ocho cuestiones corresponden a una prueba realizada por una maestra para evaluar el conocimiento de sus alumnos acerca de los decimales. Resuelve las cuestiones de la prueba y responde a las diversas preguntas que se plantean sobre las respuestas de los alumnos.

Cuestión 1: Dar el número entero que sigue inmediatamente después del 54. Dar el número entero que sigue inmediatamente a 23'5. Dar el número decimal que sigue inmediatamente a a32'13.

Respuestas: Nicolás ha respondido: 55 24 32'14; Ruz ha respondido: 55 24 32'131; Florencio ha respondido: 53 23 32'12

1. Analiza los eventuales errores de estos niños.

Cuestión 2: Ordenar los números siguientes de menor a mayor:
23'4 23'37 23'127 17'15671 23'036 2'3401

Respuestas: En la tabla adjunta se dan las ordenadas hechas por seis niños. Analizar la lógica interna de estas ordenaciones:

María	*23'4*	*23'37*	*23'036*	*23'127*	*2'3401*	*17'15671*
Cristóbal	*23'4*	*23'37*	*23'127*	*23'036*	*17'15671*	*2'3401*
Manuel	*2'3401*	*17'15671*	*23'036*	*23'127*	*23'37*	*23'4*
Sebastián	*2'3401*	*1715671*	*23'4*	*23'37*	*23'036*	*23'127*
Julia	*2'3401*	*17'15671*	*23'4*	*23'036*	*23'37*	*23'127*
Tomás	*2'3401*	*17'15671*	*23'036*	*23'4*	*23'37*	*23'127*

2 ¿Qué finalidad puede tener el tratar de buscar "la lógica interna" de estas ordenaciones? ¿Qué puede hacer la maestra si no la encuentra?

Cuestión 3: Señalar la expresión que piensas que es falsa:
Entre 12'7 y 12'9: no hay ningún decimal -hay un decimal -hay varios decimales.
Entre 14'6 y 14'7: no hay ningún decimal -hay un decimal - hay varios decimales.

Respuestas: Joaquín piensa que hay un decimal entre 12'7 y 12'9, y ninguno entre 14'6 y 14'7. Pero Benito no está de acuerdo.

3. Trata de precisar la causa del error del niño que está equivocado.

Cuestión 4: Efectúa las siguientes operaciones: 3'7 + 5'8; 3'7 x 5'8
Respuesta: Alicia encuentra como solucion 8'15 y 15'56 para estas operaciones.

4. ¿Se puede relacionar su error con alguno otro de los encontrados anteriormente?

Cuestión 5: Efectúa la siguiente operación: 13'56 x 10
Respuesta: Vicente encuentra 13'560; Jerónimo encuentra 13'56.

5. ¿De dónde puede provenir sus errores?

Cuestión 6: ¿Es 23 un número decimal?
Respuesta: Cecilia es la única que piensa que sí.

6. ¿Qué harías en tu clase?

Cuestión 7: ¿Son decimales los números 1'234578 y 17'35353535... (35 repetido indefinidamente)
Respuestas: A David le gustaría encontrar la fracción que es igual a 17'353535... Dígale cuál es. José pienss que un número cuya escritura comporta una infinidad de cifras detrás de la coma no es un número decimal.

7 ¿Qué piensa de ésto? Muéstrale un ejemplo simple.¿Es el número 5'7899999 ..... (una infinidad de 9) un decimal? Justifícalo.

Cuestión 8: ¿Son decimales las fracciones: 1/4, 3/20, 7/8, 13/6, 243/6?

8 ¿Cómo se conoce que una fracción irreducible es decimal (sin hacer la división)? ¿En qué clase piensa que se ha propuesto este test? ¿Con qué finalidad? ¿Cómo debe explotar los resultados de este test la maestra?

4.2. Análisis de una experiencia de enseñanza

La observación sistemática y el análisis didáctico de experiencias de enseñanza es una actividad importante en la preparación de futuros maestros. A continuación incluímos la transcripción de una sesión de matemáticas en una escuela de primaria sobre la enseñanza de la suma de decimales[15]. Lee el texo y responde a las preguntas siguientes:

1. En la transcripcion se indica la hora y el tiempo que transcurre. ¿Puedes identificar de algún modo los diferentes momentos de la clase?
2. ¿Es importante la organización de la clase en grupos de dos alumnos?
3. El maestro emplea la palabra “situación” y no la palabra “problema” o “ejercicio”. ¿Hay alguna razón para ello?
4. Anuncia que no va a escribir el texto en la pizarra sino solamente “los números que serán útiles”. Pero de hecho también escribe las palabras “banco”, “planchas” ...¿Hay una diferencia de sentido entre “dos coma nueve metros” y “dos metros nueve”?
5. ¿Cuál es el papel que juegan las cuestiones planteadas por los alumnos después de la lectura del enunciado? ¿Son todas de la misma importancia?
6. La observación de un alumno anunciando que había encontrado el resultado, ¿es ignorada por el maestro? ¿Y por los otros alumnos?
7. ¿Cómo pueden saber los alumnos si sus hipótesis de trabajo son adecuadas?
8. ¿Cuál es la tarea de los alumnos?¿Encontrar las planchas que el carpintero debe emplear? ¿Explicar el método utilizado? ¿Qué es un “método” para un alumno?

[15] Este ejemplo de análisis didáctico de una experiencia de enseñanza ha sido seleccionado del excelente libro de Briand y Chevallier (1995).

9. ¿Cómo comprender la frase de Julien “No, no vale treinta y seis, es demasiado grande ...”?
10. ¿Qué habría escrito Élise después de 1,33 +0, si hubiera terminado su cálculo? ¿Cómo explicar su observación “Esto es falso”?
11. ¿Se pueden explicar los errores cometidos por Julien y Élise?
12. ¿Por qué ha elegido Cédric los dos números más grandes?
13. ¿Qué significa la observación de Cédric “hay que poner las comas en frente”?
14. ¿Qué pensar de la pregunta “Si la coma representa el metro, ¿qué representa las otras cifras?” ¿y de las explicaciones que siguen?
15. ¿Han comprendido los alumnos (en particular Julien y Élise) el método utilizado por Cédric?
16. ¿Cómo interviene aquí el hermano de Cédric?
17. ¿Es válida la hipótesis del maestro (que los alumnos van a utilizar sus conocimientos sobre las fracciones decimales)?
18. ¿Qué se puede pensar del contexto (y modo de presentación) del problema?
19. ¿Por qué se da el enunciado oralmente?

Transcripción de una sesión de matemáticas

La transcripción describe una sesión de 20 minutos en una clase de primaria así como las interacciones entre dos alumnos (Julien y Élise) durante dicha sesión.

9 h 30

Preparación de los alumnos

EL MAESTRO: Vais a trabajar en parejas. Voy a presentar una pequeña situación sobre la cual vais a trabajar, la debeis encontrar sobre la hoja. Os presento el texto, no lo voy a escribir en la pizarra. Escribo sólo los nombres que os van a ser útiles.
Un aficionado al bricolage quiere fabricar un banco con planchas de madera de dos coma nueve metros de largo.
Escribe en la pizarra: **un banco de 2,9 m de largo**.
Un banco de dos coma nueve metros de largo. ¿Sabe todo el mundo cómo se construye un banco?

LOS ALUMNOS: ¡No!

EL MAESTRO: Se cogen planchas y se ponen extremo con extremo. Para construir este banco, dispone de cinco tablas en un cobertizo pero no quiere ir a buscar y acarrear las tablas que no utilizará. Va a elegir las que convienen mejor para construir el banco. Os voy a dar las longitudes de las cinco planchas.
Escribe: **5 planchas: 1m; 1,57 m; 1,1 m; 1,33 m; 0,3 m.**
Vuestro trabajo será ayudar a este señor a encontrar las planchas que, puestas una a continuación de la otra dan la longitud de dos coma nueve metros.
Escribe en la pizarra: **2,9 m.**

UN ALUMNO: Pero, ¿se pueden tomar varias?

EL MAESTRO: ¿Piensas que se puede tomar sólo una? No, seguro, se pueden tomar varias. Por tanto, tenéis que encontrar cuáles son esas planchas y cuántas son necesarias.

OTRO ALUMNO: Pero, ¿hay varias de cada clase o una sola?

EL MAESTRO: Hay una sola plancha de cada longitud. Sólo hay cinco planchas.

El maestro señala las medidas escritas en la pizarra.

OTRO ALUMNO: ¿Se pueden cortar?

EL MAESTRO: No, no se pueden cortar. Utiliza las planchas tal y como están.

9 h 37

EL MISMO ALUMNO: ¡He encontrado el resultado!

EL MAESTRO: Bien, pero... Tenéis que trabajar por grupos, es necesario que cada grupo sea capaz de explicar cómo lo ha hecho. Ese es sobre todo vuestro trabajo. De acuerdo tú puedes ... si ya lo has encontrado, tanto mejor, pero debes ser capaz de explicarlo solo, mejor en grupo, uno de cada grupo debe ser capaz de explicar el método que ha utilizado para encontrarlo, trabajad en parejas.

9 h 38

El maestro supone que los niños van a utilizar espontáneamente sus conocimientos sobre las fracciones decimales:

$1{,}57 = 1 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100}$

$1{,}33 = 1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100}$

por tanto, $1{,}57 + 1{,}33 = (1 + \frac{5}{10} + \frac{7}{10}) + (1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100})$

$1{,}57 + 1{,}33 = (1 + 1) + (\frac{5}{10} + \frac{3}{10}) + (\frac{7}{100} + \frac{3}{100})$

$1{,}57 + 1{,}33 = 2 + \frac{8}{10} + \frac{10}{100}$

$1{,}57 + 1{,}33 = 2 + \frac{9}{10}$

1,57+1,33 =2,9

Entre ellos

ÉLISE: Vamos a probar un metro ... no, esto no va bien ... probemos con un metro y cero tres ...

Julian escribe en su cuaderno: **1 m + 0,3 = 1,3**

ÉLISE: No, esto no vale porque si tienes un metro más ... esto suma un metro tres ...

Élise escribe: **1,3 + 1,1 = 2,4**

JULIAN: Luego dos metro cuatro ...

ÉLISE: Para conseguir dos metros nueve ... espera ... si se toma un metro treita y tres mas un metro ... no, dos metros treinta y tres ... esto va bien.

9 h 43

EL MAESTRO: Hay varios métodos. Podeis encontrar varios métodos y ver si dan el mismo resultado por ejemplo.

9 h 44

Entre ellos

ÉLISE: Vamos a probar con un metro treinta y tres, no quiero decir uno coma treinta y tres, uno coma treinta y tres metros, eso vale ..

JULIAN: Menos ...

ÉLISE: ¡No se puede cortar!

JULIEN:¡Ah, si!

ÉLISE: Más ... ¿Qué es lo que podría ayudar?

JULIEN: Cero tres.

ÉLISE: Vamos a probar, porque después ...
Escribe: **1,33 + 0,**

JULIEN: Esto va a sumar treinta y tres, ¡eh!. Treinta y seis. No, no es treinta y seis, es demasiado grande porque ... ¡Ah no, un metro treinta y seis!

ÉLISE: Si esto suma un metro treinta y seis, es demasidado ... (*tacha*)

JULIEN: Es necesario llegar a dos metros nuevo ...

ÉLISE: ¡Ah! Esto ... Espera, espera un metro cincuenta y siete, un metro

JULIEN: Un metro cincuenta y siete más ...

ÉLISE: Cero tres, esto hace un metro sesenta ... ¡no!
Escribe: **1,57 +0,3 = 1,60**

JULIEN: ¿Cuánto has encontrado?

ÉLISE: No, esto es falso, no, no, no, esto es falso, es falso, no se puede ... un metro cincuenta y siete más cero tres esto hace un metro sesenta ...

JULIEN: Un metro cincuenta y siete más cero tres .. si tu haces ..

ÉLISE: No, no ... uno coma cincuenta y siete más cero coma tres igual a uno coma sesenta ....

9 h 45

EL MAESTRO: Vamos, ¿quien es capaz? ¡Dejad los bolígrafos!

JULIEN: ¡No hemos encontrado nada!

EL MAESTRO Ya se ha acabado la búsqueda y se van a escuchar las soluciones propuestas. ¿Qué tal? ¿Richard? ¿Se ha encontrado? ¿Paul-Éric? ¿Quién ha encontrado algo y quiere venir a explicarlo? Bien, ¿qué grupo comienza?¿Cedric? Vamos, ven a la pizarra, nos vas a explicar lo que has hecho, valiente, para todo el mundo.
Da una tiza a Cédric.

CÉDRIC: Bueno, yo no lo he encontrado al principio y enseguido, me he dicho que tomando los dos números más grandes, podría encontrar un resultado. Un metro cincuenta y siete y un metro treinta y tres, esto da dos metros noventa.

EL MAESTRO: ¿Cómo lo haces, un metro cincuenta y siete y un metro treinta y tres? ¿Es decir?

CÉDRIC: He hecho una suma.

EL MAESTRO: ¡Ah!, muestranos cómo has hecho la suma.

Cédric escribe sin comentario:

$$\begin{array}{r} 1{,}57 \\ +1{,}33 \\ \hline 2{,}90 \end{array}$$

EL MAESTRO: ¡Espera!
CÉDRIC: ¡Puedo quitar este cero y esto es dos metros nueve!
Tapa con la mano el 0:

ÉLISE: ¡Ah, sí! ¡Está bien!

EL MAESTRO: Bueno, ¿puedes explicar a los demás porqué has hecho una operación como esa? ¿Por qué has sumado este 7 con este 3? ¿este 5 con este 3? ¿este 1 con este 1?
Muestra las cifras en la pizarra.

CÉDRIC: Aquí, había una coma. Hay que poner las comas enfrente.
Muestra 1,57 en la operación planteada.

EL MAESTRO: ¡Ah! ¡Hay que poner! ¿Quién te ha dicho que hay que poner –¡chitón¡ - ¿es que se ha dicho eso en clase? ¡No! Chitón ...
CÉDRIC: La coma representa el metro.

Entre ellos	ÉLISE: ¡Sí, eso es! JULIEN: ¿Quién lo ha dicho? ÉLISE: ¡Sí!

EL MAESTRO: ¡Ah! Tú piensas que la coma, aquí, representa el metro por tanto, ¿qué es lo que has dicho a continuaicón? Si la coma representa el metro, ¿qué representan las otras cifras?

Entre ellos	JULIEN: ¡Los decímetros! ÉLISE: Los centrímeros! JULIEN: ¡De-cí-metros¡ ÉLISE: ¡De acuerdo!

CÉDRIC: Cinco los decímetros.

EL MAESTRO: Si, y ...

CÉDRIC: Siete centímetros.

EL MAESTRO: Si y debajo ...

CÉDRIC: Un metro, tres decímetros, ¡uh¡, tres decámetros, deci ...

EL MAESTRO: ¡Decímetros¡

CÉDRIC: Y tres centímetros.

EL MAESTRO. Y despues, ¿tú has sumado? ¿Qué has hecho después?

CÉDRIC: ¡He sumado¡

EL MAESTRO: Los ...

CÉDRIC: Un metro cincuenta y siete y un metro treinta y tres, esto me ha dado dos metros noventa.

EL MAESTRO: Bueno, ¿ha entendido todo el mundo el método usado por Cédric?

ÉLISE y JULIEN: ¡Sí, sí!

LOS ALUMNOS: Sí ...

EL MAESTRO: Paul-Éric nos dice que esto es lo más fácil. No forzosamente. Dime, Cédric, quién te lo ha enseñado. ¿Lo sabías de antes o por el contrario lo has encontrado enseguida?

CÉDRIC: Ha sido mi hermano quien me lo había enseñado.

EL MAESTRO: ¿Quiénes son los que ya saben hacer esto?
Se levantan una docena de dedos.

¿Quién no lo sabe? ¿Quién no ha hecho esto nunca con las comas? Nunca se ha hecho una suma con comas en clase? ... ¿Quién no lo ha hecho nunca antes?
Algunos dedos no se levantan, los niños se miran.

9h 50 (fin de la observación)

BIBLIOGRAFÍA

Briand, J. y Chevalier, M-C. (1995). *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*. Paris: Hatier.

Brousseau, N. et al. (1992). *La mesure en cours moyen, è^re année; compte rendu d'activites*. Irem de Bordeaux. [La medida en el ciclo medio, 1er año; informe de actividades. Traducción de J. Díaz Godino]

Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995). *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*. Talence: IREM d' Aquitaine.

Castro, E. (2001). Números decimales. En, E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (p.315-343). Madrid: Síntesis.

Centeno, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?*. Madrid: Síntesis.

Ferrero, L. y cols (1999). *Matemáticas (5º y 6ª Primaria)*. Madrid: Anaya.

Maurin, C. y Johsua, A. (1993). *Les outils numériques à l'école primaire et au collègue*, Vol 1. Paris: Editions Marketing (Ellipses).

Socas, M. (2001). Problemas didácticos entre el objeto matemático y su representación semiótica. Estudio con números decimales. En *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III* (pp. 297-318). Universidad de la Laguna.

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally*. New York: Longman.

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

SISTEMAS NUMÉRICOS Y SU DIDÁCTICA PARA MAESTROS

Capítulo 6:

NÚMEROS POSITIVOS Y NEGATIVOS

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE NÚMEROS POSITIVOS Y NEGATIVOS EN PRIMARIA

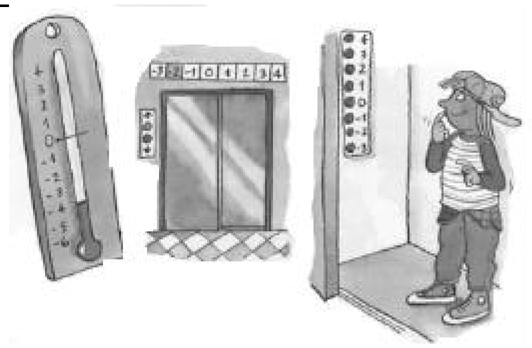
Consigna:

A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

1. Resuelve los problemas propuestos.
2. Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
3. Identifica diferencias y semejanzas entre los distintos problemas.
4. Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
5. ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
6. Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

1.
- ¿Qué temperatura marca el termómetro?
- ¿En qué planta está el ascensor?
- ¿Qué botón hay que pulsar para bajar al tercer sótano?

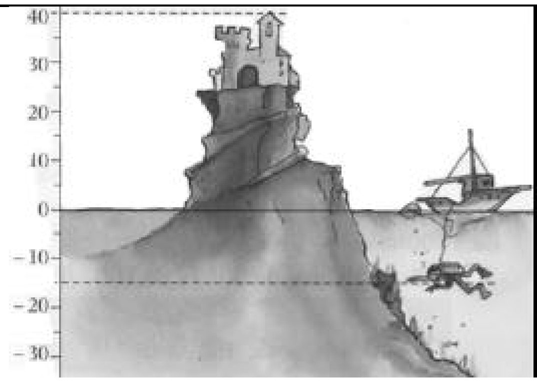


2. Escribe con números negativos:
- Siete grados bajo cero.
- El coche está en el segundo sótano.
- Nació el año 73 a. C.
- Veinte metros bajo el nivel del mar.

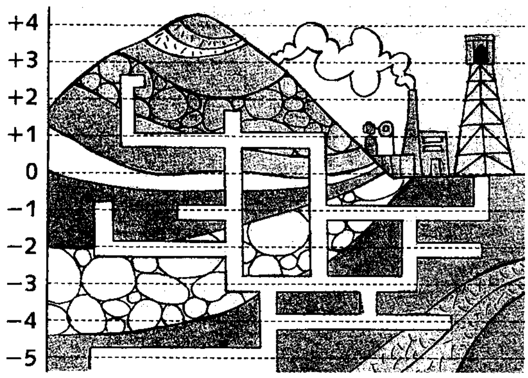
3. Hace una hora el termómetro marcaba 2 °C. Si la temperatura ha descendido 7 °C, ¿qué temperatura marca a hora el termómetro?

4. ¿Cuántas plantas hay entre el tercer sótano y el cuarto piso?

5. ¿Cuál es la diferencia de temperatura entre -2 °C y 3 °C?

6. Fíjate en el dibujo y contesta: • ¿A qué altura está el castillo • ¿A qué profundidad se encuentra el buzo?	

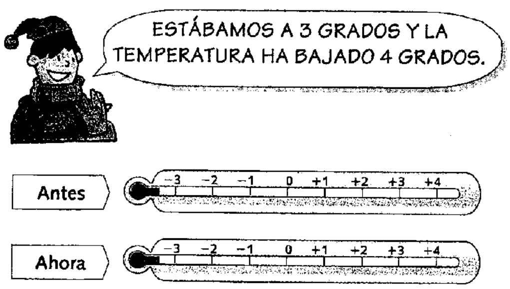
7. Ayúdate del esquema de esta mina y completa.

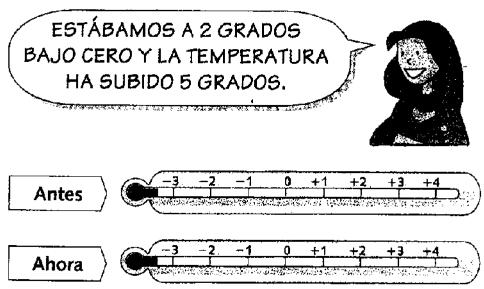
	• Estaba en el nivel +1 y subí un nivel. Ahora estoy en el nivel ... • Estaba en el nivel +2 y bajé cinco niveles. Ahora estoy en el nivel .... • Estaba en el nivel –3 y subí cuatro niveles. Ahora estoy en el nivel ... • Estaba en el nivel –1 y bajé dos niveles. Ahora estoy en el nivel ...

Contesta.

- Juanjo estaba en el nivel –1 y ha subido. ¿En qué niveles puede estar Juanjo.
- Ana estaba en el nivel 0 y ha bajado. ¿En qué niveles puede estar Ana?
- Pedro estaba en el nivel –1 y ha bajado más de un nivel. ¿En qué niveles puede estar Pedro?

8. Dibuja, en cada caso, los termómetros que marquen la temperatura indicada.



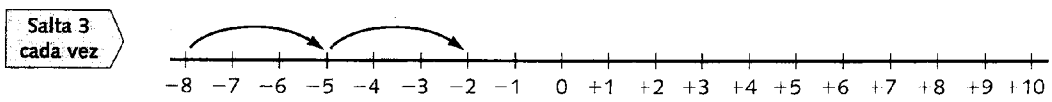


9. En cada caso, dibuja un termómetro, marca la temperatura y contexta.

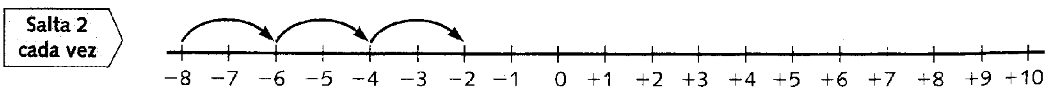
- Hoy a las 10 de la mañana el termómetro marcaba +8º. Dos horas después la temperatura subió 5º y 7 horas después la temperatura bajó 9º. ¿Qué temperatura marcará el termómetro a las 7 de la tarde?

- Ayer a las 8 de la mañana el termómetro marcaba –2º. Tres horas después la temperatura subió 4º y 8 horas después la temperatura bajó 10º. ¿Qué temperatura marcará el termómetro a las 7 horas de la tarde?

10. Completa las siguientes series.



Números de la serie: −8, −5, …



11. Piensa y escribe.

- Cinco números enteros mayores que –3.
- Cinco números enteros menores que –8.
- Cinco números enteros mayores que –5 y menores que +5.
- Cinco números enteros mayores que –9 y menores que +9.

12. Escribe *mayor* o *menor*, según corresponda.

- Cualquier número entero positivo es .... que 0.
- Cualquier número entero negativo es .... que 0.
- Un número entero positivo es ...... que cualquier número entero negativo.

13. Utiliza un papel cuadriculado y traza de rojo unos ejes perpendiculares. Después dibuja los polígonos que se indican.

- Un triángulo cuyos vértices son los puntos (+1, +1); (-2,+1) y (-1, +2).
- Un cuadrilátero cuyos vértices son los puntos (+1, +2); (-3, +1); (-2, -2) y (+3, +1).
- Un pentágono cuyos vértices son los puntos (+4, +1); (-3, 0); (-1, -1); (+2, +3) y (+5, -2).

14. Dibuja en una cuadrícula los caminos que pasan por los puntos indicados.

Camino rojo: (-3, +1), (-2, +1), (-1, +1), (+3, +2)
Camino verde: (+1, -2), (+1, -1), (0, -1), (-2, -2)
Camino azul: (-1, +1), (+1, 0), (+2, -1), (+2, +3)
Camino amarillo: (+5, -1), (+3, -2), (0, -3), (-2, -2)

Observa los caminos dibujados y contesta:

- ¿Qué caminos pasan por el punto (-1, +1)?
- ¿Qué caminos pasan por el punto (-2, -2)?

B: Conocimientos Matemáticos

1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores hemos presentado los números naturales, fraccionarios y decimales como medio de expresión del tamaño o numerosidad de los conjuntos finitos, del lugar que ocupa un elemento dentro de un conjunto ordenado y de la medida de diferentes cantidades de magnitud. Además, entre dichos números se definen las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división entera (también las de potenciación y radicación) que se corresponden con cierto tipo de acciones que hacemos sobre las cantidades de magnitudes: agrupar, separar, reiterar, repartir, etc. Hasta ahora, la invención de los números se justifica y motiva inicialmente como respuesta a estas necesidades de descripción y manipulación de ciertas situaciones de tipo empírico. Por esta razón, el estudio de los números naturales, fraccionarios y decimales y de sus operaciones se apoya sobre situaciones concretas que proporcionan ejemplos de la estructura formal a la que en última instancia se reducen.

Ahora bien, es importante resaltar que los objetos matemáticos, una vez inventados y fijadas unas primeras relaciones entre ellos, adquieren una "vida propia" y plantean nuevos problemas internos, distintos de los problemas empíricos que motivaron su introducción. Como respuesta se inventan nuevos objetos matemáticos que son conectados de manera consistente con todo el sistema ya construido. A medida que progresamos en el estudio de las matemáticas nos vamos encontrando con objetos más complejos que son inventados o construidos respondiendo a necesidades internas de la propia matemática. Y así sucede con los números con signo -positivos y negativos-, cuya construcción se debe, no tanto a la necesidad de modelizar matemáticamente situaciones del mundo sensible, como a la problemática que plantea el desarrollo de una rama de las matemáticas: *el álgebra*. Es en el entorno del álgebra donde aparecen las condiciones que hacen posible y deseable la introducción de los números con signo. Por tanto, antes de hablar de las situaciones que motivan el uso de los números positivos y negativos necesitamos comentar algunas de las características del ámbito algebraico.

2. OTRA MANERA DE RESOLVER LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS: EL MÉTODO ALGEBRAICO

2.1. Características del método algebraico de resolución de problemas aritméticos

Un problema aritmético se caracteriza porque tanto los datos como las incógnitas son números y las relaciones entre unos y otras pueden expresarse en términos de operaciones aritméticas. El método aritmético de resolución de estos problemas, del que ya hemos hablado en capítulos anteriores, consiste en construir una secuencia de operaciones que ligue los datos numéricos conocidos hasta obtener las incógnitas buscadas. Para establecer cada paso de la secuencia hay que tener en cuenta el contexto definido en el enunciado del problema.

Así, por ejemplo, la resolución del problema siguiente:

En un taller de confección disponen de 3 piezas de tela de 50 m. cada una. Con ellas van a confeccionar 30 trajes que necesitan 3 m. de tela cada uno. Con el resto de la tela piensan hacer abrigos que necesitan 4 m. de tela cada uno. ¿Cuántos abrigos pueden hacerse?

exige la secuencia de operaciones aritméticas que detallamos a continuación:

$3 \times 50 = 150$ m. de tela disponible
$30 \times 3 = 90$ m. de tela empleada en trajes
$150 - 90 = 60$ m. de tela sobrante
$60 : 4 = 15$ abrigos pueden hacerse.

Como puede verse, el método aritmético consiste en analizar el contexto para determinar una primera operación entre dos datos que da como resultado otro dato, anteriormente desconocido, que nos acerca a las incógnitas buscadas. La repetición de este proceso el número de veces que haga falta nos permite encontrar la solución del problema. Para ello es necesario estar en todo momento pendientes del contexto, pues la decisión sobre cuál es la operación siguiente a efectuar depende totalmente del significado de los datos numéricos.

Ahora bien, existe otro método de resolución de problemas aritméticos que funciona de manera muy distinta: el método algebraico. Consiste dicho método en indicar operaciones entre las cantidades citadas en el enunciado del problema, sin distinguir entre cantidades conocidas y desconocidas (representando estas últimas por medio de letras), hasta encontrar una nueva cantidad que pueda expresarse de dos maneras diferentes en función de los datos y las incógnitas, lo que permite establecer una relación de igualdad entre esas expresiones. Una vez establecidas una o varias igualdades, se procede a sustituirlas por igualdades equivalentes hasta llegar a una que contenga en uno de sus miembros una de las incógnitas y en el otro, una cantidad conocida.

El siguiente problema y su solución ilustran bien las características del método algebraico:

En un corral hay gallinas y conejos. Hay 35 animales en total. Entre todos tienen 108 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay en el corral?

- Para solucionarlo, llamamos x a una de las cantidades desconocidas: el número de gallinas, y la tratamos como si fuese conocida. En esas condiciones, el número de conejos será $35 - x$. Como las gallinas tienen 2 patas y los conejos 4, tenemos que $2x$ y $4(35 - x)$ representan, respectivamente, el número de patas de gallina y de conejos. La suma $2x + 4(35 - x)$ nos dará el número total de patas que hay en el corral. Pero por otro lado sabemos que son 108 patas, lo que nos permite escribir la igualdad[1] $2x + 4(35 - x) = 108$.

Hasta aquí se desarrolla la fase contextualizada de la resolución del problema. Para poder establecer la ecuación anterior hay que estar pendientes del significado de los números y letras que intervienen en ella, es decir, hay que mantener un control semántico sobre nuestras decisiones. Pero, a partir del momento en que la ecuación queda establecida, el proceso de resolución se descontextualiza: las transformaciones

[1] A esta igualdad se le llama 'ecuación' porque sólo es cierta para algunos valores particulares de la incógnita (en este caso, para un solo valor) a los que se les llama 'soluciones' de la ecuación.

que sufre la ecuación ya no dependen del significado de sus términos en el contexto del problema, sino de la interpretación correcta de unos códigos escritos y de una manipulación que respete las propiedades de las operaciones aritméticas y de las igualdades. Aparece, por tanto, una fase de resolución descontextualizada sobre la que se ejerce un control sintáctico, no semántico, cosa que no sucede en el método aritmético. Será como sigue:

- Eliminamos el paréntesis de la ecuación, 2x + 140 – 4x = 108, reducimos términos semejantes, 140 – 2x = 108, pasamos términos de un miembro a otro de la ecuación, 140 – 108 = 2x, 2x = 32, y, por último, dividimos la ecuación por 2, x = 16, y obtenemos el número 16 como solución de la ecuación inicial.

Durante la fase anterior no es necesario recurrir al significado que tienen los números y las letras en el enunciado del problema que nos ocupa, basta poner en juego unas reglas sintácticas, unas reglas de manipulación de ecuaciones o, más en general, de manipulación de escrituras algebraicas.

Finalmente, una vez obtenida una incógnita, hay que referirse de nuevo al contexto para darle significado y poder terminar diciendo que en el corral hay 16 gallinas y 19 conejos.

2.2. Las reglas de prioridad en las operaciones combinadas

La necesidad, propia del método algebraico, de expresar operaciones entre números y letras[2], así como de indicar simultáneamente una sucesión de operaciones a realizar, obliga a definir unos códigos escritos mucho más complejos que los usuales en aritmética. En ésta, todas las operaciones son efectuables y, por tanto, puede hacerse una detrás de otra de manera independiente, indicándolas por medio de la grafía del algoritmo correspondiente. La disposición de los cálculos es, básicamente, vertical: se escribe el algoritmo de una operación y debajo el de la siguiente. En cambio, en el cálculo algebraico nos encontramos con una escritura en horizontal en la que quedan trabadas distintas operaciones que a priori no se han efectuado. Además, durante la fase descontextualizada el control sobre la validez del cálculo algebraico no puede basarse en el significado que los números y letras tengan en el particular contexto en el que se trabaje. Todo esto obliga a establecer reglas muy precisas de lectura, escritura y manipulación de estas expresiones que en aritmética no son necesarias.

Por ejemplo, en la expresión 3 + 2· 5, si se empieza sumando 3 + 2 y multiplicando después por 5, se obtiene 25, mientras que si se multiplica primero 2· 5 y después se le suma 3, se obtiene 13. Esta duplicidad de resultados, y el hecho de no poder recurrir a un contexto para decidir qué operación conviene efectuar en primer lugar, obliga a ponerse de acuerdo sobre unas reglas de escritura que definan, sin ambigüedad posible, el orden en que deben realizarse las operaciones indicadas en la expresión algebraica[3]. Y así, se conviene que en la ejecución del cálculo 3 + 2· 5 hay que entender que el producto tiene prioridad frente a la suma y que, por tanto, 3 + 2· 5 = 3 + 10 = 13. Para

[2] Números (y letras que los representan) que de momento son naturales, fracciones de números naturales o raíces positivas de los anteriores, como corresponde a un álgebra que es una mera técnica de resolución de problemas aritméticos elementales, a un álgebra entendida como "aritmética generalizada".

[3] Entendemos que 3 + 2· 5 es una expresión algebraica porque, aun cuando no contiene letras y las dos operaciones que aparecen en ella son efectuables, la manera de presentarlas, como operaciones indicadas ligadas entre sí, es típica del método algebraico. En una resolución estrictamente aritmética, estas operaciones se presentarían por separado: primero el producto 2· 5, después la suma, 3 + 10.

indicar a nuestro interlocutor que la suma debe efectuarse antes que el producto tendríamos que escribir $(3 + 2)5$, y entonces resultaría $(3 + 2)5 = 5\cdot 5 = 25$.

Las reglas de prioridad que se definen para la ejecución de las operaciones combinadas son las siguientes:

- En ausencia de paréntesis:

a) se realizan en primer lugar las raíces y potencias, después los productos y cocientes y, por último, las sumas y restas[4].

b) la realización de varias operaciones de un mismo rango[5] se hará de izquierda a derecha. Este orden podrá modificarse si existen propiedades de los números (propiedades aritméticas) que justifiquen el cambio.

- Si hay paréntesis:

a) la realización de los paréntesis es prioritaria, salvo que se eliminen o modifiquen de acuerdo con las propiedades aritméticas.

b) en el caso de paréntesis encajados tienen prioridad los interiores respecto a los exteriores.

Además, en la realización de los cálculos rige el siguiente principio de economía:

- A la hora de realizar operaciones combinadas se elegirá el camino más económico en cuanto al número de operaciones a realizar o al tamaño de los números intermedios obtenidos.

Por ejemplo, con la escritura siguiente:

$3 + 2(7 – 2^2) – 1$

queremos indicar que primero debe efectuarse la potencia $2^2 = 4$, después la resta contenida en el paréntesis, $7 – 4 = 3$, a continuación, el producto de 2 por el número resultante del paréntesis, $2\cdot 3 = 6$, después la suma, $3 + 6 = 9$, y, por último, la resta, $9 – 1 = 8$. En conclusión, $3 + 2(7 – 2^2) – 1 = 8$.

3. SITUACIONES QUE MOTIVAN EL USO DE LOS NÚMEROS CON SIGNO

En las expresiones $3 + 2\cdot 5$ ó $3 + 2(7 – 2^2) – 1$ todas las operaciones parciales son efectuables por lo que, siguiendo las reglas de prioridad de operaciones, obtenemos un número natural como resultado final de dichos cálculos. Pero podemos construir fácilmente expresiones algebraicas numéricas que no sean parcialmente efectuables. Por ejemplo, la expresión $10 + (3 – 5)$ propone un cálculo imposible en el ámbito de la aritmética, $3 – 5$, porque “donde hay 3 objetos (ó 3 unidades de una cantidad de magnitud) no se pueden quitar 5”. Sin embargo, si utilizamos una propiedad de la aritmética que dice que “sumar una diferencia equivale a sumar el minuendo y restar el sustraendo” podemos transformar esa expresión en una equivalente, $10 + 3 – 5$, compuesta por operaciones que ya son efectuables, $10 + 3 – 5 = 13 – 5 = 8$, y dan como

[4] Esta regla afecta a los números o letras que estén ligados a otros dos números o letras por medio de operaciones de distinto rango. Por ejemplo, en la operación $2 + 3\cdot 5$, el número 3 está ligado al 2 por una suma y al 5 por un producto, luego tiene prioridad el producto.

[5] Se considera que las raíces tienen el mismo rango que las potencias, los productos el mismo rango que los cocientes, y las sumas el mismo que las restas.

resultado un número natural. Otro ejemplo: si nos proponen el cálculo 371 + 452 – 453 lo más económico es pensar que "sumar 452 y restar 453 equivale a restar 1" ya que las 452 unidades que se suman se neutralizan con las 452 unidades que contiene el segundo número y que hay que restar. Por tanto, lo más sencillo es escribir 371 + 452 – 453 = 371 – 1 = 370. Sin embargo, esto significa que, de alguna manera, hemos efectuado una resta con un sustraendo mayor que el minuendo, lo que en aritmética no es admisible.

En resumen, la naturaleza del cálculo algebraico, incluso como mero instrumento de apoyo a la aritmética, desborda el marco aritmético y hace aparecer como deseable la prolongación de las operaciones a casos que la aritmética no contempla. En particular, la manipulación de restas (o diferencias) en las que el minuendo sea menor que el sustraendo. Y ¿cómo hacer esto? Pues sustituyendo el cálculo entre números (o letras que los representan)

- bien por un cálculo entre sumandos y sustraendos, es decir, entre números en los que, a la hora de operar, se tiene en cuenta su papel en la expresión algebraica en tanto que números que suman o restan a otros;

- bien por un cálculo entre diferencias, unas con minuendo mayor o igual que el sustraendo y otras con minuendo menor que el sustraendo.

Para ello, habrá que establecer las reglas de cálculo, no ya entre números, como veníamos haciendo hasta ahora, sino entre números precedidos de un signo + ó – que indica su condición de sumandos o sustraendos, o entre diferencias a-b, con a mayor, igual o menor que b. Y esto habrá que hacerlo de manera que dichas reglas sean compatibles con el cálculo entre números ya conocido de antemano, es decir, de forma que conserve las propiedades de las operaciones aritméticas, lo que se conoce como "principio de permanencia de las leyes formales de la aritmética".

4. LAS REGLAS DE CÁLCULO DE LOS NÚMEROS CON SIGNO

4.1. Las equivalencias entre sumandos y sustraendos, diferencias y números

Para toda diferencia con minuendo mayor o igual que el sustraendo podemos encontrar otras muchas que se comportan exactamente igual que ella: todas aquellas que dan el mismo resultado. Por ejemplo, en un cálculo podemos sustituir la diferencia 5-3 por la diferencia 8-6 sin que eso modifique el resultado final. Eso es debido a que en ambos casos la diferencia, una vez efectuada, es 2. Por eso se dice que esas dos diferencias son equivalentes. Pero 5-3 es equivalente a otras muchas diferencias, por ejemplo: 5-3 = 4-2 = 2-0 = 6-4 = 17-15 = ... Todas dan el mismo resultado y todas ellas se obtienen sumando o restando un mismo número al minuendo y el sustraendo. Pero además, también podemos sustituir cualquiera de ellas por el número natural 2, sabiendo que esto no va a afectar al resultado final de las operaciones.

Si extendemos estos razonamientos al caso de diferencias con minuendo menor que el sustraendo, en un primer momento nos encontramos con que aquí no podemos establecer una equivalencia entre diferencias basada en que al efectuarlas se obtiene el mismo resultado, porque estas diferencias ya no son efectuables en el ámbito de los números sin signo. Por ejemplo, la diferencia 3-5 no tiene solución en los números naturales. Sin embargo, lo que sí podemos hacer es establecer la equivalencia entre dos diferencias cuando una de ellas se obtiene sumando un mismo número a minuendo y sustraendo de la otra. De esa manera podemos considerar como equivalentes las diferencias 3-5 = 1-3 = 0-2 = 4-6 = 28-30 = ..., aun cuando no sean efectuables en N. Además, cualquier diferencia con minuendo menor que el sustraendo siempre tendrá como equivalente una diferencia del tipo 0-*a*, lo que en la práctica es un sustraendo. Por tanto, toda diferencia con minuendo menor que el sustraendo es equivalente a un sustraendo.

Por otro lado, cuando se desarrollan las reglas de cálculo de los sumandos se comprueba que en todo momento se comportan como los números sin signo, por lo que se les puede considerar equivalentes. En resumen, la familiarización con el cálculo con sumandos y sustraendos y diferencias permite ver que, por una parte, el número sin signo *n* (natural o fraccionario), el sumando +*n* y las diferencias con el minuendo mayor o igual que el sustraendo que dan como resultado *n*, son equivalentes entre sí (+*n* = *n*-0 = *n*); por otro lado, el sustraendo -*n* es equivalente a la diferencia con el minuendo menor que el sustraendo 0-*n* y a todas las equivalentes a ella (-*n* = 0-*n*).

4.2. Adición y sustracción de números con signo

Supongamos que tenemos dos sumandos, por ejemplo, +3 y +2. Podemos representarlos por medio de diferencias equivalentes a ellos, por ejemplo, 3-0 y 2-0. Si tenemos en cuenta las reglas de la aritmética[6], la suma de estos dos sumandos o diferencias será:

$$(+3)+(+2) = (3-0)+(2-0) = (3+2)-(0+0) = 5-0 = +5$$

En el caso de que tengamos dos sustraendos, -3 y –2, podemos representarlos también en términos de diferencias, 0-3 y 0-2. Si extendemos la regla de suma de diferencias a este caso, obtendremos:

$$(-3)+(-2) = (0-3) +(0-2)= (0+0)-(3+2)= 0-5 =-5$$

Y, por último, si tenemos un sustraendo y un sumando podemos establecer su suma del siguiente modo:

$$(+3)+(-2) = (3-0)+(0-2) = (3+0)-(0+2) = 3-2 = 1-0 = +1$$
$$(-3)+(+2) = (0-3)+(2-0) = (0+2)-(3+0) = 2-3 = 0-1 = -1$$

En la práctica, esto se traduce en la regla siguiente: *para sumar dos números con el mismo signo, se suman los números y se mantiene el signo; para sumar dos números con distinto signo, se restan los números y se pone el signo del número mayor.*

La suma entre números con signo, además de cumplir las propiedades asociativa y conmutativa, igual que la suma entre números, tiene la ventaja de que todo número con signo tiene un opuesto, es decir, otro número con signo que sumado con él da como resultado cero. La suma, $(+n)+(-n) = (n-0)+(0-n) = (n+0)-(0+n) = n-n = 0$, nos muestra que +*n* es el opuesto de -*n* y, recíprocamente, -*n* es el opuesto de +*n*. Y esto tiene una consecuencia importante: la de que toda resta se puede expresar en términos de suma. En efecto, efectuar la sustracción β-α, donde α y β representan números con signo

[6] En este caso, la regla que dice que "la suma de dos diferencias es otra diferencia cuyo minuendo es la suma de los minuendos y cuyo sustraendo es la suma de los sustraendos".

cualesquiera, equivale a encontrar la solución de la ecuación $x+\alpha = \beta$. Y aplicando las propiedades aritméticas[7], se tiene que

$$x+\alpha+op(\alpha) = \beta+op(\alpha), \quad x+0 = \beta+op(\alpha), \quad x = \beta+op(\alpha)$$

y, por tanto, $\beta-\alpha = \beta+op(\alpha)$. La consecuencia inmediata es que, en la práctica, las restas se reducen a sumas y lo que en los números naturales o fraccionarios se interpretaba como dos operaciones distintas, en los números con signo se convierte en una única operación. Esto facilita grandemente la manipulación de las expresiones algebraicas porque la suma es una operación que se comporta mucho mejor que la resta, dado que cumple las propiedades asociativa y conmutativa, lo que no sucede con esta última.

Ejercicio

1. Justificar las propiedades asociativa y conmutativa de la adición de números con signo, interpretándolos como diferencias de números.

4.3. Valencias y usos de los signos + y –

La aparición de los números con signo hace que los signos + y - adquieran nuevos significados o valencias. En el campo de la aritmética los signos + y - se usan para indicar las operaciones binarias de adición y sustracción entre números. En el ámbito algebraico, mantienen su sentido como indicadores de operaciones binarias, aunque ya no entre números, sino entre números con signo, pero aparece un nuevo sentido como signo predicativo, es decir, como signo que indica la cualidad de sumando o sustraendo de un número. Pero además, el hecho de que $\beta-\alpha = \beta+op(\alpha)$ hace deseable la interpretación de $-\alpha$ como el opuesto de α. Así pues, en la escritura algebraica los signos + y - pueden indicar:

a) la cualidad de sumandos o sustraendos de los números con signo (signos predicativos).
b) las operaciones binarias de suma y resta entre números con signo (signos operativos binarios).
c) la operación unaria que mantiene un número con signo o lo transforma en el opuesto (signos operativos unarios).

Sin embargo, la práctica habitual en la manipulación de las escrituras algebraicas pasa por la supresión de todos los signos operativos binarios, no sólo los que afectan a sumas y restas, también los que se refieren a productos y cocientes. Los signos que indican restas y cocientes no se usan porque estas operaciones se expresan en términos de suma con el opuesto o producto por el inverso, respectivamente; la suma se representa colocando los números con signo uno a continuación del otro (por ejemplo, –4-5+3 indica la suma de los términos -4 y -5 y +3) y el producto, colocando los términos uno a continuación del otro y envueltos en paréntesis (por ejemplo, (-4)(-5)(+3) indica el producto de los términos -4, -5 y +3).

[7] En este caso, la propiedad de que “si a los dos miembros de una igualdad se le suma o resta un mismo número, la igualdad se conserva”.

La multiplicidad de significados de los signos + y - junto con la supresión de los signos operativos binarios permite una gran flexibilidad y comodidad de interpretación y manejo de las expresiones algebraicas. Por ejemplo, la expresión 10-5-8+5-10-4, entendida como suma de los términos +10 (hay costumbre de suprimir también el signo + en su sentido predicativo cuando afecta al primer término de una expresión o de un paréntesis), -5, -8, +5, -10 y –4, permite cambiar de lugar cualquiera de los términos y asociarlo en la forma que resulte más eficaz para obtener el resultado, puesto que la suma tiene las propiedades asociativa y conmutativa (10-5-8+5-10-4 = -8-4 = -12). Otro ejemplo: en la expresión 3a+(-5a+7-2b)-(8-b) los signos que preceden a los paréntesis deben interpretarse como signos operativos unarios: el primero de ellos, al ser un signo +, deja invariable el paréntesis, el segundo, al ser un signo -, indica que hay que transformar el paréntesis en su opuesto. Teniendo en cuenta que "el opuesto de una suma es la suma de sus opuestos[8]", podemos escribir 3a+(-5a+7-2b)-(8-b) = 3a-5a+7-2b-8+b. Como ahora se trata de una suma entre los términos +3a, -5a, +7, -2b, -8 y +b, podemos asociar y conmutar los términos en la forma que nos resulte más cómoda y obtenemos la expresión equivalente -2a-b-1.

4.4. Ordenación de números con signo

La ordenación de los números con signo viene dada por la necesidad de definir una relación de orden compatible con la suma. Esta compatibilidad exige que si a los dos miembros de una desigualdad se les suma un mismo número con signo, la desigualdad se conserve. Si tenemos en cuenta las siguientes desigualdades aritméticas: 8+3 < 8+5, 8-3 < 8+5 y 8-5 < 8-3, donde los signos + y - indican operaciones binarias entre números naturales o fraccionarios sin signo, vemos que todas ellas pueden reinterpretarse en términos de sumas entre números con signo sin más que considerar los signos + y - como predicativos. Si ahora sumamos a los dos miembros de las desigualdades el término –8 y exigimos que las desigualdades se conserven, se obtiene que +3 < +5, -3 < +5 y -5 < -3.

En general, la regla de ordenación de números con signo nos dice que: *-n < +m cualesquiera que sean n y m, +n < +m si n < m y -n < -m si n > m.*

4.5. Multiplicación y división de números con signo

Dados dos sumandos, por ejemplo, +3 y +2, siempre podremos representarlos por medio de diferencias equivalentes a ellos, por ejemplo, 3-0 y 2-0. Si tenemos en cuenta las reglas de la aritmética[9], la multiplicación de estos dos sumandos o diferencias puede expresarse como:

$$(+3)(+2) = (3-0)(2-0) = (3-0)2-(3-0)0 = 3.2-0.2-3.0+0.0 = 6-0 =+6$$

Si tenemos dos sustraendos, por ejemplo, -3 y -2, también podemos representarlos en términos de diferencias como, por ejemplo, 0-3 y 0-2. Si efectuamos ahora la multiplicación de esos dos sustraendos o diferencias, obtendremos:

[8] Esta propiedad se demuestra fácilmente porque (a+b)+(op(a)+op(b)) = a+b+op(b)+op(a) = a+ op(a) = 0. Esto nos hace ver que op(a)+op(b) es el término que sumado con a+b da cero. Por tanto, es el opuesto de a+b, op(a+b) = op(a)+op(b).

[9] En este caso, las propiedades asociativa y conmutativa del producto y la propiedad distributiva del producto respecto a la resta.

(-3) (-2) = (0-3)(0-2)= (0-3)0-(0-3)2 = 0.0-3.0-0.2+3.2 = 6-0 = +6

Por último, si tenemos un sumando y un sustraendo, por ejemplo, +3 y -2, podemos establecer su producto del siguiente modo:

(+3).(-2) = (3-0)(0-2) = (3-0)0-(3-0)2 = 3.0-0.0-3.2+0.2 = 0-6 = -6

En la práctica, esto se traduce en la regla siguiente: *para multiplicar dos números con el mismo signo, se multiplican los números y se coloca delante del resultado el signo +; para multiplicar dos números con distinto signo, se multiplican los números y se coloca delante del resultado el signo -.*

En cuanto a la división de números con signo, hay que tener en cuenta que, en el campo de los números fraccionarios, la división por un número distinto de cero se reduce a la multiplicación del dividendo por el inverso del divisor, con lo que toda división entre fracciones se convierte en una multiplicación. De acuerdo con esto, a la división de números con signo le son de aplicación las reglas establecidas para la multiplicación de números con signo: *para dividir dos números con el mismo signo, se dividen los números y se coloca delante del resultado el signo +; para dividir dos números con distinto signo, se dividen los números y se coloca delante del resultado el signo -*. Sucede aquí lo mismo que en el caso de la suma y la resta

Como consecuencia, en los números fraccionarios con signo las cuatro operaciones típicas de la aritmética elemental se reducen a dos: la suma y la multiplicación, ya que la resta se transforma en una suma con el opuesto del sustraendo y la división por un número distinto de cero en un producto por el inverso del divisor.

Ejercicios

2. Justificar las propiedades asociativa y conmutativa del producto de números con signo, interpretándolos como diferencias de números.

3. Justificar la propiedad distributiva del producto de números con signo respecto a la suma, interpretándolos como diferencias de números.

5. LA CONDICIÓN DE NÚMEROS DE LOS NÚMEROS CON SIGNO

5.1. ¿Son números los números con signo?

Hasta ahora, hemos hablado de los números con signo pero no hemos discutido si son o no números. Desde luego, son números precedidos de un signo + ó -, pero, a ese nuevo objeto matemático formado por un número y un signo, ¿podemos darle también la consideración de número? La respuesta no es trivial, ni siquiera fácil. Si interpretamos los números con signo como sumandos o sustraendos no hay ninguna razón para considerarlos números. En el ámbito de la aritmética elemental, la caracterización de los números viene dada porque expresan cardinales de conjuntos o medidas de cantidades de magnitud. En este sentido 5 ó 4/7 son números porque pueden expresar el resultado de una medida. Pero +5 y -4/7 solo indican que en una determinada expresión los números 5 ó 4/7 tienen un papel como sumandos y sustraendos que conviene tener en cuenta a la hora de ejecutar los cálculos, dado que eso los facilita. Son, por tanto, objetos intermediarios del cálculo que dejan de tener sentido cuando éste termina, pues el resultado final de las operaciones deja ya de cumplir un papel como sumando o sustraendo

Si interpretamos los números con signo como diferencias, parece evidente que los números precedidos de un signo + sí que son números, desde el momento que son diferencias con minuendo mayor que el sustraendo y, por consiguiente, perfectamente efectuables en el campo numérico. Pero ¿que pasa con las diferencias con minuendo menor que el sustraendo? Desde el punto de vista aritmético esas diferencias no son efectuables, ya que la operación de restar se identifica con las acciones de quitar, separar, sustraer, etc., y nunca se puede quitar de donde no hay, por lo que resulta imposible aceptar que esas diferencias constituyan un número.

Durante muchos siglos –desde Diofanto (siglo III d.C)– los matemáticos usaron los números con signo en sus cálculos sin pretender que, a su vez, fueran números. Sin embargo, diversas circunstancias históricas hicieron cada vez más deseable su consideración como números. El desarrollo de una teoría general de ecuaciones fue haciendo necesaria la aceptación como soluciones de las ecuaciones de los números con signo y de sus raíces. El teorema fundamental del álgebra que dice que toda ecuación polinómica tiene, al menos, una solución, solo puede establecerse si se trabaja en un campo numérico que contenga los números con signo y sus raíces (lo que, hoy en día, conocemos como conjunto de los números complejos). Por otra parte, a partir de Descartes (siglo XVI) el álgebra se convierte en una herramienta al servicio de la geometría. Hasta entonces, las manipulaciones algebraicas se hacían para resolver problemas aritméticos y, por consiguiente, las letras representaban siempre medidas de cantidades.

La geometría analítica fue desarrollando la noción de abscisa que terminó por identificar los números con signo con los puntos de la recta, permitiendo que una misma ecuación representase una curva situada en diferentes cuadrantes. La identificación entre los números con signo y los puntos de la recta se establece a partir de la elección de dos puntos arbitrarios a los que se les adjudica los números 0 (al de la izquierda) y +1 (al de la derecha). La concatenación a derecha e izquierda del segmento (0,+1), permite definir los puntos +2, +3, +4, etc., a la derecha de cero, y los puntos -1, -2, -3, -4, etc., a la izquierda de cero. Después, mediante técnicas de fraccionamiento de segmentos se van identificando los puntos que corresponden a números fraccionarios con signo.

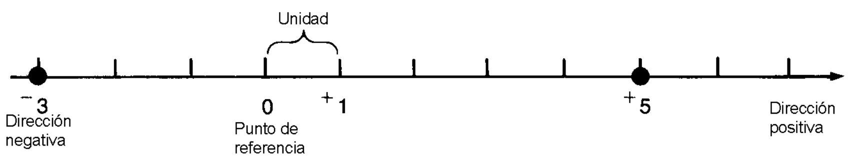


Fig. 1

La interpretación de los números con signo como puntos de la recta permite interpretar el orden entre ellos desde un punto de vista espacial: *un número con signo a es menor que otro b si está situado a la izquierda de b sobre la recta numérica*.

Por otro lado, la aparición de magnitudes vectoriales y relativas contribuyó también al afianzamiento de los números con signo como números. En las magnitudes vectoriales: velocidades, aceleraciones, fuerzas, etc., para caracterizar una cantidad de magnitud no basta con un número que exprese su medida sino que es necesario un vector que incorpora además especificaciones sobre su dirección y sentido. En las magnitudes relativas: temperaturas, etc., la medida cero no indica ausencia de cantidad de magnitud, sino que representa la medida de una cierta cantidad de magnitud a la que convencionalmente se le atribuye ese valor para que sirva de referencia a la medida de otras cantidades de la misma magnitud. La existencia de magnitudes vectoriales y relativas permitió utilizar los números con signo para expresar cantidades de magnitud unidireccionales (en las que los signos expresan uno u otro sentido dentro de la misma dirección) y relativas (en las que el signo indica si la cantidad de magnitud es mayor o menor que la cantidad de magnitud tomada como origen).

Sin embargo, y a pesar de todos estos avances, fue necesario esperar a la revolución matemática que se produjo en el primer tercio del siglo XIX para que, definitivamente, los matemáticos asumieran que los números con signo eran números. Para ello, hubo que despojar al número de su sentido originario como medida de cantidades de magnitud y aceptar como definiciones válidas en matemáticas, no solo aquellas que "dan sentido físico" a los objetos matemáticos (definiciones esencialistas), sino también aquellas que definen los objetos matemáticos estableciendo sus reglas de manipulación (definiciones funcionales). En este nuevo marco teórico Peacock estableció en 1830 que los números con signo eran números (positivos los precedidos de un signo + y negativos los precedidos de un signo -). A los números naturales precedidos de un signo se les llamó números enteros, **Z**, y a las fracciones y los naturales precedidos de un signo, números racionales, **Q**.

5.2. Definición axiomática de Q

Vamos a dar ahora una definición funcional del conjunto de los números racionales, entendiendo por tal el conjunto de números naturales y fraccionarios precedidos del signo + ó -.

Un conjunto será considerado el "conjunto de los números racionales", **Q**, si:

a) está dotado de dos operaciones binarias, suma y producto, que cumplen las siguientes propiedades:

Suma	Producto
Asociativa: $(x+y)+z = x+(y+z)$	Asociativa: $(xy)z = x(yz)$
Commutativa: $x+y = y+x$	Conmutativa: $xy = yx$
Elemento neutro para la suma, 0 $x+0 = x$	Elemento unidad para el producto, 1 $x.1 = x$
Cada racional tiene un opuesto único $x+(-x) = 0$	Cada racional distinto del elemento neutro tiene un inverso único $x.(1/x) = 1$
Distributiva del producto respecto a la suma $x(y+z) = xy+xz$	

b) tiene definida una relación de orden total que cumple las siguientes propiedades:

Si x   y entonces x+z   y+z,
Si x   0 e y   0 entonces xy   0

De un conjunto que cumple las propiedades enunciadas en los apartados a) y b) se dice que es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado. Por lo tanto, Q es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado. Pero esto no basta para caracterizar al conjunto de los números racionales, es necesario añadir la siguiente propiedad:

c) No existe ningún otro cuerpo conmutativo totalmente ordenado contenido estrictamente en **Q**. Dicho de otra manera, el conjunto de los números racionales es el mínimo cuerpo conmutativo totalmente ordenado que existe.

De la misma manera, se puede definir el conjunto de los números enteros, **Z**, como el mínimo anillo conmutativo con unidad totalmente ordenado, entendiendo por tal un conjunto que cumple todas las propiedades de los apartados a) y b), salvo la que se refiere a la existencia de inverso, y que no tiene ningún anillo conmutativo con unidad totalmente ordenado estrictamente contenido en él.

Ejercicios:

3. Demostrar la propiedad de cancelación de la suma:

Si x+y = x+z, entonces y = z.

4. Demostrar las propiedades multiplicativas del cero:

a) 0. x = 0, para cualquier racional x.
b) Si xy = 0, donde x e y son racionales, entonces x = 0 ó y= 0.

6. TALLER MATEMÁTICO

1. El modelo de las fichas bicolores

Una representación concreta de los enteros se tiene mediante colecciones de fichas de dos colores, por ejemplo, negras y blancas, usando el convenio de que cuando se tiene un par de fichas de colores distintos se anulan mutuamente. Cada una de las configuraciones de fichas de la figura 2 sirve para representar el entero -5 porque en cada conjunto hay 5 fichas blancas en exceso respecto de la cantidad de fichas negras. Las tres primeras configuraciones se pueden reducir a la última formada sólo por cinco fichas rojas descartando los pares que se pueden formar con fichas de colores distintos. Se puede pensar que las fichas negras son pequeñas piezas de materia y las blancas de antimateria, que al juntarse desaparecen; también se puede pensar que las negras son cargas positivas (o ingresos en una contabilidad) y las blancas son cargas negativas (o retiradas de efectivo)

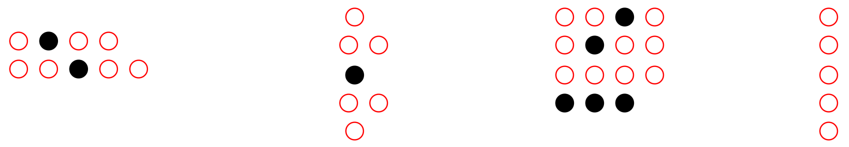


Fig. 2

Definir las operaciones de adición y multiplicación mediante el modelo concreto de las fichas bicolores. Comprobar las propiedades estructurales de los números enteros mediante ejemplos de situaciones referidas a la manipulación de colecciones de fichas bicolores.

2. Resolver los siguientes problemas explicando la solución mediante representaciones gráficas sobre la recta numérica.

a) Un misil se ha disparado a 30 metros bajo el nivel del agua; 5 segundos después está a 90 metros sobre el nivel del mar. ¿Cuántos metros ha ascendido en los 5 segundos?

b) La temperatura era de -4 grados esta noche; desde entonces ha bajado 9 grados. ¿Cuál es la temperatura ahora?
c) Hace tres años un kg de azúcar costaba 42 céntimos. Desde entonces, su precio anual ha sufrido los cambios -3, +21, -9 céntimos. ¿Cuánto cuesta ahora?
d) El saldo contable de un comerciante en las últimas seis semana ha registrado las siguientes variaciones: -4, -2, 0, +1, -1, +3. ¿Cuál ha sido su ganancia o pérdida neta?
e) En aguas quietas un barco puede moverse a la velocidad de 16 km por hora. ¿A qué velocidad puede ir en un río cuyas aguas fluyen a 5 km por hora, si va en la dirección del río. ¿Y si va contracorriente?
f) Un avión vuela a 190 km/h si va en contra del viento, mientras que si va a favor del viento vuela a 220 km/h. ¿Cuál es la velocidad del viento? ¿A qué velocidad puede volar el avión en atmósfera quieta?

3. Las temperaturas en grados Celsius se relacionan con las temperaturas en grados Fahrenheit mediante la ecuación

$$C = \frac{5.(F-32)}{9}$$

Encontrar las temperaturas Celsius correspondientes a las siguientes temperaturas Fahrenheit.
a) 104ºF b) 212ºF c) 14ºF d) 21ºF e) -4ºF f) -$^{-}$40ºF

4. Realiza las siguientes operaciones de la forma más económica posible:

a) 15-(17-6)+2(15-13)

b) 28-(-8-4):(33-29)

c) (28-(-8-4)):(33-29)

d) 32-12+20-50-20+75-(-8)^3

e) (28-3)-5(3-9)-(6+2):4· 5

f) -15-(12-20)+(-10+14)

g) -[(-8)+(-7)]-[(-5)+(+3)]

h) (-6)[(+9)-(+2)]-(-3)(-4)

i) (7-5-1)^3(4+5)^2

j) (1-2(-3+2)):3-(-1+2· 4+3)-2+1

k) 7-2· 6^2:4-3^2

l) (7-2)6^2:(4-3)^2

m) 7-(2· 6)^2:4-3^2

n) 7(-2)· 6^2:4(-3)^2

ñ) 7(-2· 6)^2:(4(-3)^2)

5. Si x representa un entero distinto de cero cualquiera, ¿cuáles de las siguientes expresiones son negativas?

a) $-x$ b) $-(-x)$ c) $(-x)^2$ d) $-(x^2)$ e) x^3

f) $(-x)^3$ g) $|x|$ h) $-|x|$

6. Justificar los diferentes pasos de la siguiente demostración:

$a = 0 + a$	
$= [-(-a) + (-a)] + a$	
$= -(-a) + [(-a) + a]$	
$= -(-a) + 0$	
$= -(-a)$	

7. Usar la definición algebraica de la relación "menor que" para probar la siguiente propiedad: *Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $c.a < c.b$*

8. Encontrar el conjunto de soluciones en Z de cada una de las siguientes desigualdades:

a) $(x+3)(x-2) > 0$ (Observación: ¿Bajo qué condiciones puede ser positivo un producto de dos enteros $\alpha.\beta$?)

b) $(x-1)(5-x) > 0$

C: Conocimientos Didácticos

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

El Diseño Curricular Base del MEC para el área de Matemáticas en Primaria hace referencia a los números con signo en el bloque temático sobre *Números y operaciones*, aunque sólo en el apartado de *Hechos, conceptos y principios*. Concretamente, los números enteros figuran como una clase de números, junto con los naturales y racionales (que designa como fraccionarios y decimales). También se mencionan explícitamente los números positivos y negativos dentro del punto dedicado a sistemas de numeración.

> *Hechos, conceptos y principios*
> 1. Números naturales, enteros, fraccionarios y decimales.
> (…)
> 2. Sistemas de numeración: decimal, romano, monetario, para medir ángulos, para medir el tiempo.
> (…)
> • Números positivos y negativos. Números cardinales y ordinales.

En el Real Decreto por el que se establece el currículo de Educación Primaria del MEC se suprime la referencia a los números enteros, pero se continúa haciendo mención de los números positivos y negativos en el bloque de *Números y operaciones*.

Por otro lado, los Principios y Estándares 2000 del NCTM incluyen en el bloque de *Números y operaciones*, para los grados 3 a 5 el siguiente objetivo (expectativa): "explorar números menores que 0 extendiendo la recta numérica mediante aplicaciones familiares".

Para los grados 6 a 8 se amplia con la siguiente mención: "desarrollar el significado de los enteros y representar y comparar cantidades con ellos". Los enteros quedan incorporados en estos niveles como una nueva clase de números que deben dominarse progresivamente, tanto en la comprensión del significado de las operaciones como el cálculo con ellos.

Aparte de estas referencias curriculares que, en cierta medida, son una justificación para incluir su estudio en el programa de formación de maestros, podemos aducir la importancia social y cultural de los contextos de usos de los números positivos y negativos, pues se utilizan cada vez con más frecuencia en situaciones cotidianas, lo que fuerza a los niños a familiarizarse con algunos de sus aspectos.

Ejercicio

1.Analizar las diferencias y semejanzas en las orientaciones curriculares siguientes respecto del estudio de los números naturales y la numeración,
- Diseño Curricular Base del MEC
- Las orientaciones curriculares de tu Comunidad Autónoma
- Principios y Estándares 2000 del NCTM.

2. DESARROLLO COGNITIVO. CONFLICTOS EN EL APRENDIZAJE

2.1 Dificultades para "dar sentido" a los números positivos y negativos y sus operaciones

Las dificultades de los alumnos para comprender y manipular correctamente los números positivos y negativos son, en cierta medida, un reflejo de las que históricamente tuvo la comunidad matemática para aceptarlos como números. Asumir los números con signo exige romper la visión tradicional de los números como nociones que expresan el resultado de la medida de una cantidad de magnitud absoluta. En ese contexto, el cero indica la ausencia de cantidad de magnitud, por lo que no puede haber números menores que cero; la suma se asocia con acciones de añadir o reunir, por lo que el resultado tiene que ser mayor o, a lo sumo, igual que los sumandos; la resta se asocia con acciones de separar o quitar, por lo que el resultado tiene que ser menor o, a lo sumo, igual que el minuendo; si en una resta el minuendo es menor que el sustraendo, la operación es imposible porque no se puede quitar más de lo que se tiene; si dos fracciones tienen el mismo denominador, es menor la que tiene menor numerador porque éste indica las partes alícuotas de la unidad que se toman, etc. Todas estas afirmaciones son consustanciales al concepto de número y tienen una influencia decisiva en su construcción.

Sin embargo, aceptar la existencia de los números con signo supone asumir que los números y sus operaciones ya no tienen, en general, las propiedades antedichas. Hay que entender que los números no siempre expresan medidas de cantidades de magnitudes absolutas, que existen números menores que cero ($-3<0$), que cero no siempre indica ausencia de cantidad de magnitud, que sumar no siempre significa aumentar ($(+3)+(-2)=+1$), que restar no siempre significa disminuir ($(+3)-(-2)=+5$), que a un número se le puede restar otro número mayor ($6-8=-2$), que en fracciones del mismo denominador no siempre es menor la que tiene menor numerador ($5/-2<3/-2$), etc. Todo esto exige una reestructuración del concepto de número. No se trata de añadir más información a la que ya se posee, sino de modificar sustancialmente nuestro concepto de número, de elaborarlo de nuevo, asumiendo que muchas propiedades fundamentales, que creíamos ciertas para todos los números, ahora ya no lo son[10]. Y las prácticas habituales de enseñanza de los números enteros no contribuyen a poner de manifiesto la necesidad de esta reelaboración.

La escuela tiende a presentar los números enteros en un contexto aritmético, ligados a medidas de cantidades de magnitud y acciones físicas ejercidas sobre dichas cantidades. Es decir, utiliza una introducción de los números enteros por medio de modelos concretos (deudas y haberes, temperaturas, movimientos y posiciones a derecha e izquierda de un origen, etc), a imagen y semejanza de las introducciones de los números naturales y fraccionarios. Pero esto agrava las dificultades para aceptar que los nuevos números exigen una reestructuración completa del concepto de número y contribuye a crear en el alumno la falsa idea de que los razonamientos que servían para los números naturales siguen sirviendo para los números enteros.

Y así, bastantes niños deciden que $-7>-3$ porque "una deuda de 7 euros es mayor que una de 3 euros" o porque "a 7 grados bajo cero hace más frío que a 3 grados bajo

---

[10] En realidad, este proceso se inicia con la introducción de los números racionales, pues multiplicar por un número menor que la unidad supone disminuir el multiplicando, y dividir por él, aumentar el dividendo, lo cual es impensable en el ámbito de los números naturales. De ahí, los errores habituales de los niños cuando, por ejemplo, dicen que 0,3· 0,2 es 0,6 (en vez de decir 0,06) o que 6:0,2 es 3 ó 0,3 (en vez de 30).

cero" o porque "si recorremos la recta numérica desde el cero, primero nos encontramos el punto –3 y después el punto –7"; o deciden que (+7)-(-2) = +7 porque "si tengo 7 euros y me perdonan una deuda de 2 euros, sigo teniendo 7 euros"; o consideran que (-6)-(-2) = 4 porque "la diferencia entre 6 grados bajo cero y 2 grados bajo cero es de 4 grados"; o no pueden entender que (-3)(-4) sea igual a +12 porque "si se multiplica una deuda por otra deuda, no puede dar un haber"; o, ante la pregunta de si pueden encontrar un número que sumado a 8 dé 3, responden que eso no es posible porque "si tengo 8 objetos y añado algunos más, no me pueden quedar 3"; etc.

2.2 Dificultades de manipulación de los signos + y – en las expresiones algebraicas

Otro orden de dificultades aparece en la manipulación de los signos + y - en las expresiones algebraicas, tanto numéricas como literales. Ya no son dificultades ligadas al "sentido" o la "significación" de los números con signo, sino a las reglas formales de escritura y cálculo. Y también aquí se observa una relación directa entre las prácticas habituales de enseñanza y los errores de los alumnos. Una de ellas es la interpretación que hacen muchos libros de texto de los signos + y - como signos operativos binarios, lo que fuerza a seguir interpretando las expresiones algebraicas numéricas en términos de sumas y restas entre números sin signo, con lo que todas las ventajas que supone el cálculo con números con signo se pierden.

Por ejemplo, si en la expresión 7+5-8-3-4+2 consideramos los signos como signos operativos binarios, nos encontramos con una sucesión de sumas y restas que afectan a números naturales. En estas condiciones, los alumnos tienden a operar de izquierda a derecha, a medida que leen, lo que en este caso daría lugar a un cálculo correcto, o a asociar los números de dos en dos, dando por supuesto que la propiedad asociativa se cumple también para la resta. En este segundo caso se producen errores del tipo 7+5-8-3-4+2 = (7+5)-(8-3)-(4+2) = 12-5-6 = 1.

Si en vez de esto, interpretamos que los signos de la expresión 7+5-8-3-4+2 son predicativos, estaremos ante una suma entre números con signo lo que nos permite asociarlos y conmutarlos como nos parezca oportuno. El intento de la escuela de reducir los cálculos con números enteros a cálculos con números naturales desvirtúa las condiciones de necesidad que están en la génesis de estos números. Precisamente, lo cómodo, lo que permite un cálculo ágil, es transformar las sumas y restas de naturales en sumas de enteros y no al revés.

Para evitar que los alumnos asocien de manera inconveniente los términos de una expresión algebraica numérica en la que solo intervienen sumas o restas, sin renunciar a convertir las sumas de números con signo en sumas y restas de números sin signo, muchos profesores imponen la norma de que se deben sumar, por un lado, todos los números precedidos del signo + y, por otro, todos los precedidos del signo -, para terminar efectuando la operación pertinente entre los dos términos resultantes. Esta regla garantiza la corrección del resultado, pero estereotipa enormemente los cálculos y no permite simplificaciones. Por ejemplo, en la expresión 177+53-84-53+4+80-2 sumar negativos con negativos y positivos con positivos supone hacer varias operaciones innecesarias.

También conduce a errores la tendencia de los alumnos a interpretar como signo predicativo lo que, en ocasiones, debe entenderse como signo operativo unario. De ahí que, ante una expresión como -x, digan que representa un número negativo, en vez de decir que representa el opuesto de x (y que -x será negativo si x es positivo y positivo si x es negativo).

Por último, queda por reseñar un fenómeno que afecta también a las reglas formales de cálculo. La regla de los signos para la multiplicación y división es de fácil recuerdo mientras que las reglas formales de suma y resta de números con signo tienen un enunciado más complejo. Esto da lugar a que algunos niños terminen aplicando la regla de los signos al caso de sumas y restas y decidan, por ejemplo, que (+7)-(-2) = -5 porque "siete menos dos es cinco y más por menos es menos".

3. SITUACIONES Y RECURSOS

A la hora de plantearnos la introducción de los números positivos y negativos, tenemos que tener en cuenta que donde verdaderamente se estudian es en la Educación Secundaria, mientras que en la Educación Primaria apenas hay alguna referencia a estos números. En esta etapa, se trata sobre todo de desarrollar aquellas actividades aritméticas con números naturales o fraccionarios que posteriormente puedan facilitar la introducción de los números con signo. Comentaremos también alguna actividad introductoria de la suma de dichos números.

3.1. Situaciones con números naturales que anticipan los números enteros

Son situaciones aditivas que se resuelven perfectamente en el ámbito de los números naturales pero que, al intervenir en ellas transformaciones, movimientos o comparaciones, exigen el añadido de ciertas especificaciones (de aumento o disminución en las transformaciones, de más o de menos en las comparaciones o de derecha o izquierda en los movimientos) cuyo tratamiento anticipa la estructura aditiva de los números enteros.

Situación 1: Adivina el número[11]

Un alumno anota en secreto un número inferior o igual al número total de alumnos de la clase. A continuación, cada uno de los demás compañeros, propone un número con la intención de adivinarlo. Una vez descubierto el número, cada alumno indicará si acertó o no, y en caso negativo si se pasó o no llegó y en cuanto.

Situación 2: Alturas[12]

1. Anotar las estaturas de todos los compañeros. Tomar la altura del más alto como el origen y situar todas las otras ordenadamente en una recta graduada.
2. En el lugar correspondiente a la estatura de cada compañero escribir la diferencia de estatura respecto al más alto
3. Repetir lo mismo tomando como origen:
   a) La estatura del más bajo.
   b) La del que se encuentra en la mitad
   c) La de cualquier compañero que no se encuentre en ninguno de los tres casos anteriores.

Situación 3: Juego de dados[13]

Por parejas se utilizan dos dados de colores diferentes y un papel donde se dibuja la semirrecta natural. Partiendo de un punto suficientemente elevado, cada jugador tira los dos dados por turno, resta los dos números y avanza o retrocede, dependiendo del color

[11] González y cols (1990, p. 177)
[12] Colectivo Periódica Pura (1982, p. 43)
[13] Gonzalez y cols (1990, p. 281)

del número mayor, tantos lugares como indica el resultado. Llega un momento en que pueden aparecer resultados que "se salen" de la semirrecta, lo que se aprovecha para discutir la necesidad de ampliación, dar nombres a los puntos por debajo de cero (por ejemplo, añadiendo al número una i para indicar que está a la izquierda del cero) y seguir jugando con ellos. Gana el jugador que consigue sobrepasar un cierto número fijado de antemano.

Situación 4: Los chinos[14]

Juego para dos jugadores. Se utiliza como material seis fichas bicolores (por ejemplo, amarilla y roja).

Desarrollo:

El orden de juego es alternante. Es necesario decidir quién comienza.

Cada jugador toma dos o tres fichas a la vista del contrario (dejando las otras sobre la mesa). En secreto las pone sobre la palma, de la cara amarilla o de la roja.

Cada uno hace una apuesta sobre el total. Se destapan las dos cantidades y se hace la "suma" neutralizando todos los pares bicolores.

Si alguno de los jugadores ha acertado el total, gana un punto.

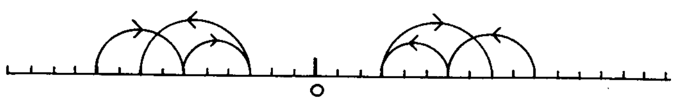
Gana el juego el que después del tiempo fijado ha reunido más puntos.

Se pueden plantear las siguientes preguntas:

a) Si un jugador coge dos fichas, ¿cuáles son las posibles jugadas?
b) ¿Y si coge tres fichas?
c) ¿Cuáles son los posibles resultados globales si los jugadores cogen dos fichas cada uno?
d) ¿Y si cogen tres fichas cada uno?
e) ¿Y si uno coge tres y el otro dos?
f) ¿Hay alguna estrategia que facilite o asegure la victoria?

Situación 5: Simetría en Z

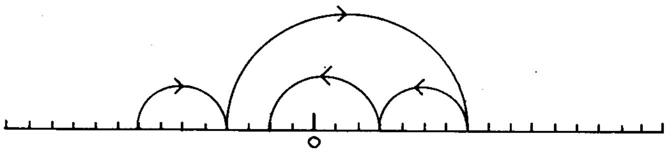
Dos canguros juguetones saltan sobre la abscisa jugando a "imitar al rey", pero al contrario:



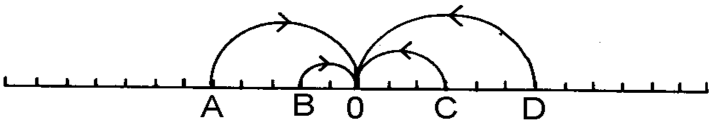
Parten de lugares simétricos y cada movimiento que un canguro hace hacia un lado, el otro lo hace hacia el lado contrario. Dos niños, con tizas de dos colores, pueden jugar en la pizarra.

1. Juega con un compañero: Colocad las puntas de vuestros lápices en dos puntos simétricos. El que comienza hace un salto y el otro jugador hace el salto contrario; a continuación el segundo jugador comienza de nuevo y el primero es el que responde.
2. Dibuja la jugada "simétrica" de esta figura (poniendo números a las posiciones y a los saltos):

[14] Periódica Pura (1982, p. 141)



3. Observa el gráfico y completa la tabla adjunta:



Punto inicial	Desplazamiento	Punto final
A =		
B=		
C=		
D=		

Ejercicio

2. Para cada una de las situaciones descritas en esta sección:

a) Formula los objetivos que se pretenden con las situaciones
b) Enumerar y describir los conocimientos que se ponen en juego
c) Identificar las variables didácticas
d) Enunciar variantes posibles de las situaciones cambiando los valores de las variables didácticas
e) Identificar posibles técnicas de solución de los alumnos y dificultades previsibles
f) Indicar las posibles explicaciones (institucionalización) que el profesor podría dar como síntesis final de la actividad realizada.
g) Identificar las limitaciones de las situaciones cuando se proponen como modelos de la estructura algebraica de los números enteros.

3.2 Situación introductoria de la estructura aditiva de los números enteros

Dado que la justificación de los números enteros viene dada por el cálculo algebraico, las situaciones introductorias deben ser situaciones aritméticas que exijan una resolución de tipo algebraico. Pero no entendemos por tal una resolución en términos de ecuaciones, pues ésta es compleja de desarrollar si no se manejan los números con signo; lo que proponemos es cambiar el objetivo de la resolución de problemas: ya no se trataría de buscar el número que soluciona el problema, sino la fórmula que lo soluciona[15]. Y para que esa actividad de búsqueda de fórmulas tenga sentido, es necesario que alguna de las cantidades que intervienen en el problema sea una variable a fijar en un momento posterior. Por ejemplo, el enunciado:

> *En un tren viajan cierto número de personas. En la primera estación suben 13 viajeros y bajan 25, en la segunda estación suben 15 y bajan 43 y en la tercera estación suben 32 y bajan 17. Encuentra una fórmula que nos diga cuántos viajeros quedan en el tren después de abandonar la tercera estación.*

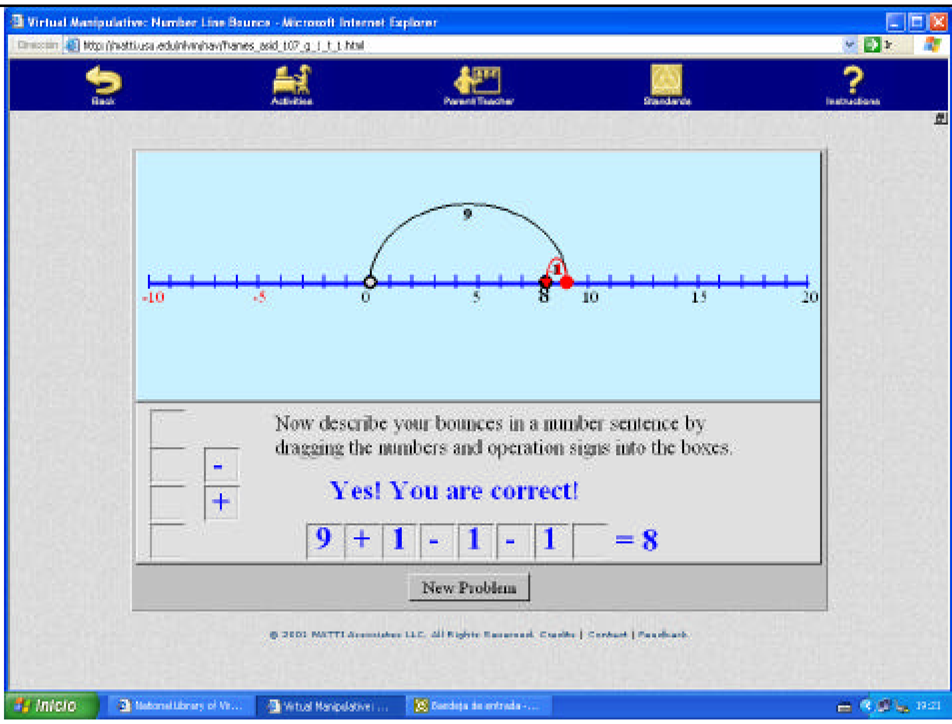
[15] Los alumnos de tercer ciclo de Primaria están familiarizados con la noción de 'fórmula' desde el momento que conocen las fórmulas de las áreas de las figuras geométricas. Se trataría de generalizar esa idea y hablar de la "fórmula de resolución" de determinados problemas.

exige nombrar el número de viajeros iniciales, v, y el número de viajeros finales, w, para establecer la fórmula w = v+13-25+15-43+32-17. La simplificación de esta fórmula en w = v-25 obliga a razonar en términos de sumandos y sustraendos y familiariza a los alumnos con la idea de manipular números precedidos de un signo + ó -. Tanto la búsqueda de fórmulas de resolución de problemas aritméticos como la transformación de esas fórmulas en expresiones más simples exige la consideración de las operaciones, no ya entre números, sino entre sumandos y sustraendos, lo que, en la práctica, significa poner de manifiesto la estructura aditiva de los números enteros.

3.3. Recursos en Internet

Modelos de sumas y rectas en la recta numérica

http://matti.usu.edu/nlvm/nav/frames_asid_107_g_1_t_1.html



Descripción:

Este recurso permite expresar las operaciones de suma y resta, tanto usando el lenguaje matemático, como mediante desplazamientos en la recta numérica.

Permite la manipulación y visualización individualizada de las operaciones.

Hay diferentes niveles de dificultad. Se usan números positivos y negativos.

Ejercicio 3:

1. Explorar las diferentes opciones del programa.
2. Indicar los niveles y partes del currículo de primaria en que se pueden usar las distintas opciones.
3. Identificar las variables didácticas de las diversas tareas propuestas en el programa y los valores particulares de dichas variables implementados. ¿Existe algún tipo de control de los valores por parte del usuario?
4. Comparar los tipos de actividades que se pueden realizar usando el programa respecto a las

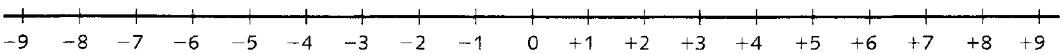
que se hacen habitualmente con papel y lápiz. ¿Se pueden hacer actividades que no se puedan realizar sin este recurso? 5. ¿Cómo cambian las técnicas de solución? 6. Después que los alumnos han explorado el programa y realizado las actividades, ¿Qué tipo de explicaciones podría dar el profesor para sistematizar los conocimientos puestos en juego?

4. TALLER DE DIDÁCTICA

4.1. Análisis de textos escolares

1. En un libro de primaria encontramos la siguiente actividad:

Observa la recta entera y calcula.



- (+3) + (-2) = ... • (-2) + (-4) = ...
- (+8) + (-5) = ... • (-4) + (-3) = ...
- (+7) + (-8) = ... • (-5) + (-4) = ...

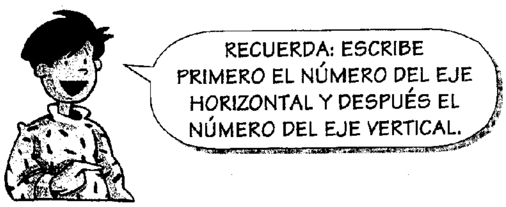
a) Enuncia seis situaciones referidas a contextos cotidianos (temperaturas, niveles de altitudes, etc.) cuya resolución implique la realización de los cálculos pedidos.

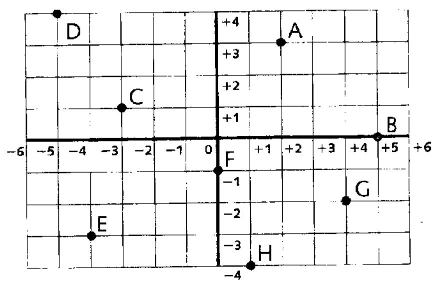
b) En el libro de texto encontramos la siguiente regla:
“Para sumar a un número entero un número entero positivo, se avanza a la derecha, en la recta entera, a partir del primer número tantas unidades como indica el segundo”.

¿Qué tipo de experiencias pueden ayudar a que los niños “reinventen” por sí mismos esta regla?

2. En un libro de primaria encontramos la siguiente actividad:

1. Observa y escribe las coordenadas de cada punto.





A → (+2, ...)	C → (..., ...)	E → (..., ...)	G → (..., ...)
B → (..., ...)	D → (..., ...)	F → (..., ...)	H → (..., ...)

2. Representa en la cuadrícula anterior los siguientes puntos.

• J → (+4, +1)	• L → (-1, +3)	• N → (+5, +3)	• → (-4, +3)
• K → (+1, -3)	• M → (+3, -2)	• Ñ → (-4, -1)	• P → (-5, -3)

a) ¿Crees que la información sobre el orden de escritura de los componentes del par de números que representan cada punto es suficiente para realizar la actividad? Completa el enunciado de las reglas de representación cartesiana de puntos del plano.
b) Inventa un juego que permita contextualizar la tarea pedida (por ejemplo, referido a la búsqueda de un tesoro).

4.2. Diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 3er ciclo de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizastes personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

- Estudia el desarrollo del tema de "Números enteros" en dichos niveles.
- Indica en qué curso se inicia y cuando termina.
- Busca algún tipo de problema o tarea que consideres no está representado en la muestra de problemas que hemos seleccionado en la parte A: Contextualización profesional de este capítulo.
- Identifica aspectos del desarrollo del tema que consideres potencialmente conflictivos para los alumnos de dichos niveles.
- Describe los cambios que introducirías en el diseño de las lecciones propuestas para los cursos 5º y 6º de primaria.

Bibliografía

Cid, E. (2002). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)*, ICE de la Universidad de Zaragoza. También puede encontrarse en Internet: http://www.unizar.es/galdeano/preprints/pre01.html

Colectivo Periódica Pura (1982). *Didáctica de los números enteros*. Madrid: Nuestra Cultural.

Ferrero, L. y cols (1999). *Matemáticas (3º a 6ª Primaria)* Madrid: Anaya.

González, J. L. (2001). Relatividad aditiva y números enteros. En Enr. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 257-283). Madrid: Síntesis.

González, J. L. y cols (1990). *Números enteros*. Madrid: Síntesis.

Rodríguez, M., Siles, I. y González, J. (1999). *Matemáticas 6º*. Madrid: Santillana.