Continuidad en un intervalo

Trabajaremos con las funciones continuas y algunas propiedades que se deducen de ellas:

Comencemos por mirar el siguiente video de Adrián Paenza:

https://www.youtube.com/watch?v=eCB_Jr_VKyg

Continuidad en un intervalo

Definición:
f es continua en el intervalo [a,b] si es continua en todo punto del intervalo (a,b) y, además, es continua en a por la derecha y en b por la izquierda.

Actividad 1:

1. Representa una función continua en [a,b] tal que f(a)>0 y f(b)<0.
2. Representa una función que no sea continua en [a,b] tal que f(a)>0 y f(b)<0 y:
   a) corte al eje de las abscisas.
   b) no corte al eje de las abscisas.
3. Representa una función continua en [a,b] tal que f(a)>0 y f(b)<0 tal que no corte al eje de las abscisas.

- Si la función es continua en [a,b] y f(a) y f(b) tienen distinto signo, ¿es posible que no corte al eje de la abscisas?

De lo que trabajaste en la actividad se desprende el enunciado del siguiente Teorema.

TEOREMA DE BOLZANO

Hipótesis f es continua en [a,b] y f(a) y f(b) son de distintos signo.

Tesis Existe por lo menos un c que pertenece al intervalo (a,b) tal que f(c) =0

En conclusión: ¿Qué presentará una función en el intervalo (a,b) si cumple con las hipótesis del teorema de Bolzano?

Ejercicios

1. Sea f / $f(x)= x^3 + 3x^2 + 4x + 3$, prueba que tiene al menos una raíz.

2. Probar que la función polinómica p tiene por lo menos una raíz en el intervalo indicado:
$p(x) = x^4 -3 x^3 -3 x^2 + 8x$ en (1, 2). Dar una estimación de la misma.

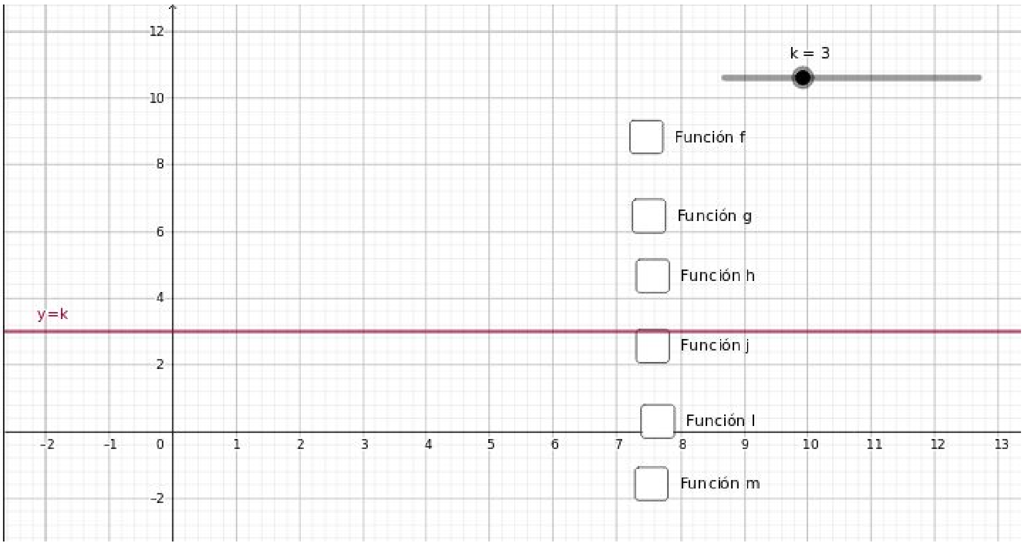
3. En cada caso, en el intervalo [a,b], el signo de f(a) es diferente del signo de f(b) y no existe c tal que f(c)=0. Explica por qué cada uno de los ejemplos no contradice el enunciado del teorema de Bolzano.

   i) f / $f(x)=1/x$, en [-2,2]

   ii) f / $f(x)= 2x$, si $x>2$ y $f(x)= 3x-9$, si $x<2$, en el intervalo [0,3]

4. Si f es continua en [1,9], f(1)=-5 y f(9)>0, ¿podemos asegurar que g / g(x)= f(x)+3 tiene al menos una raíz en el intervalo (1,9)?

Actividad 2:
Considera el applet de GeoGebra “Para conjeturar” y realiza la actividad que se te plantea a continuación.



https://www.geogebra.org/m/dybkecxs

A) Selecciona la casilla “Función f”, luego responde:

i) ¿f es continua en [-1, 4]?

ii) Considera el deslizador k, y luego responde a la siguiente interrogante: ¿La función f toma todos los valores comprendidos entre f(-1) y f(4)?

B) Vuelve a hacer clic en la casilla “Función f”. Ahora selecciona la casilla “Función g” y responde a las interrogantes i y ii para dicha función.

C) Repite la actividad para las restantes funciones.

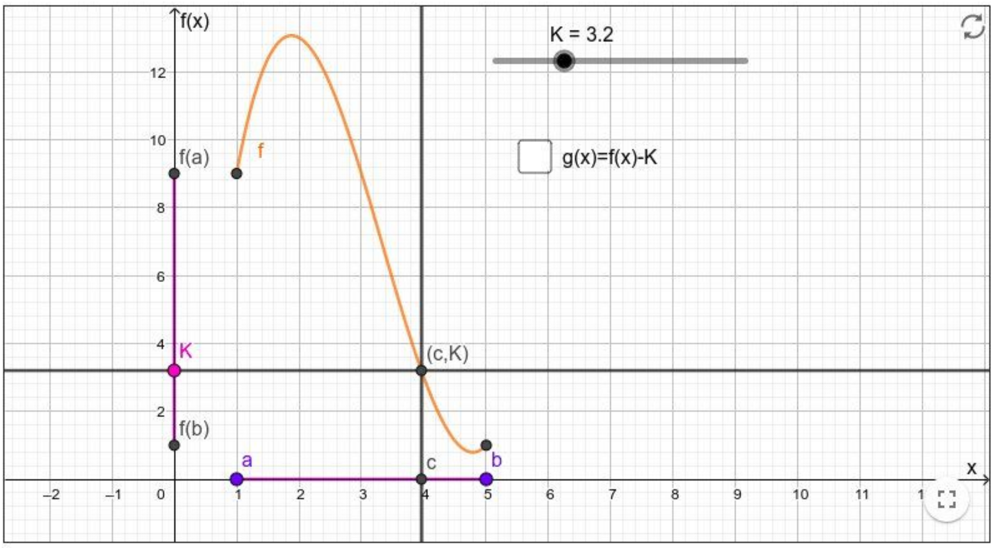
D) Responde: ¿Cuáles consideras tú que son las condiciones mínimas que debemos exigirle a una función f definida en el intervalo [a, b] para que se cumpla que **f** tome todos los valores comprendidos entre f(a) y f(b)? (en este caso f(-1) y f(4))

A partir de la actividad realizada podemos enunciar el siguiente teorema.

TEOREMA DE DARBOUX o TEOREMA del VALOR INTERMEDIO.

Hipótesis. Si una función f es continua en el intervalo [a,b] y consideramos cualquier valor k comprendido entre f(a) y f(b)
Tesis Existe por lo menos un c que pertenece al intervalo (a,b) tal que f(c)=k

Actividad 3:
Demostremos el teorema:
Considera el siguiente applet GeoGebra “Para demostrar el Teorema de Darboux” y realiza la actividad que tienes a continuación.



https://www.geogebra.org/m/vcjcjfw5
Sigue las pautas de la siguiente actividad para demostrar el teorema.

- Se considera la función f definida en el intervalo [a,b] que verifica las hipótesis del Teorema de Darboux en dicho intervalo.

- Puedes observar ahora la función auxiliar g haciendo clic en la casilla de control de la misma. Utilizaremos dicha función para realizar la demostración.
- ¿La función g es continua en [a,b]? Justifica.
- Calcula g(a) y g(b). ¿Cómo son entre sí dichos valores?
- Teniendo en cuenta que la función g verifica las dos condiciones antes mencionadas,
  * ¿qué teorema puedes aplicar en el intervalo [a,b]?
  * ¿qué puedes deducir que cumple g en ese intervalo?
  * Para el c encontrado, ¿que puedes decir de cuál será el valor de f(c)?

Ejercicios de aplicación:

1) a) Dibuja el gráfico de una función que satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones:

f está definida en [0, 3]; f(0) = 5, f(3) = 8 y para todo x en (0, 3) , f(x) $\neq$ 7

b) ¿Qué puedes asegurar de la continuidad de f?

2) La población de un cultivo de bacterias crece en forma exponencial según la ley:
$f(t) = 10000.\ 3^{t/2}$ donde t se mide en horas.

¿Podemos asegurar que la población bacteriana será de 180 324 bacterias para algún $t \leq 6$?

3)Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua en su dominio. Demostrar que existe x en (0,1) tal que f(x) = x.

4) Si f / f(x)=-x+2 y g / g(x)= Lx. Prueba que existe un c / f(c) = g(c). Interpreta geométricamente.

Autores: Mary Curbelo, Sylvia BorbonetCréditos:
Borbonet,S. Teorema de Darboux,[applet].; Licencia © 2019 International GeoGebra Institute.
Curbelo,M. “Para conjeturar”,[applet].; Licencia © 2019 International GeoGebra Institute.

Bibliografía:
Balparda,O. Lois, L. Sbárbaro,M (2007) *Matemática de sexto*. Montevideo , Ediciones de la Plaza.

Fecha de publicación: