Provincia de Buenos Aires
Dirección General de Cultura y Educación
Subsecretaría de Educación
Dirección Provincial de Educación de Gestión Estatal
Dirección de Educación General Básica
Gabinete Pedagógico Curricular - Matemática

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA MULTIPLICACIÓN EN LOS TRES CICLOS DE LA EGB

Documento Nº 4 - Año 2001

Introducción

Durante los últimos años se han desarrollado numerosos encuentros organizados por esta Dirección con maestros, profesores, directores e inspectores de diferentes escuelas, distritos y regiones con la finalidad de ofrecer espacios de reflexión conjunta sobre la enseñanza de diversos contenidos del área de matemática. A partir de dichos encuentros, se han elaborado ya los documentos Nº 1/99, Orientaciones sobre la Enseñanza de la División (2/01) y Orientaciones sobre la Enseñanza de la Geometría (3/01) en los que se recuperan experiencias de maestros y directores con el objetivo de difundirlas.

Este documento propone orientaciones para la enseñanza de la multiplicación y es, evidentemente, complementario del documento sobre la enseñanza de la división. El marco teórico desde el cuál se enfoca el tema es la Didáctica de la Matemática. En especial, se señalan los trabajos de Brousseau en los que analiza fenómenos de la enseñanza de las operaciones (1980), y el desarrollo de Vergnaud sobre los problemas de tipo multiplicativo (1991). Nos brindan aportes específicos sobre la enseñanza de las operaciones las investigaciones de Lerner (1992), el trabajo de Parra, (1994); la difusión de experiencias realizadas en el aula (Broitman, 1999, 2000) y diversos documentos de diseño y desarrollo curricular (Documento 4 GCBA, 1997; Diseño Curricular de la Prov. de Bs. As., Pre Diseño Curricular GCBA,1999; Documento para séptimo grado, 2001,

Tradicionalmente la enseñanza de la multiplicación fue pensada como contenido de segundo año bajo el supuesto de que los niños debían aprender primero a realizar las cuentas, para luego aplicarlas en situaciones problemáticas. Aprender a multiplicar ha sido identificado con el aprendizaje de las "tablas" y las cuentas. Hoy se sabe, sin embargo, que la construcción de conocimientos sobre la multiplicación no se logra cuando se aborda la enseñanza del algoritmo. Por una parte, muchos niños saben resolver los cálculos, pero no reconocen cuál es el conjunto de problemas que se resuelven con dicha operación. Por otra parte, los niños pueden resolver problemas multiplicativos aún cuando no dominen estrategias de cálculo. Si aprender a multiplicar y a dividir no es terreno exclusivo de las cuentas, ¿qué significa entonces saber multiplicar y dividir? Desde nuestra perspectiva, la construcción del sentido de los conocimientos de las operaciones involucra diferentes aspectos. Entre ellos, una variedad de problemas, una variedad de procedimientos de resolución, una variedad de estrategias de cálculo y el estudio de sus propiedades.

Hoy sabemos que la construcción de estos conocimientos lleva varios años a los niños. ¿Cómo hacerlos "crecer" en cada año? ¿Cuáles son los diferentes tipos de problemas, los diversos procedimientos de resolución y estrategias de cálculo que se pueden abordar en cada ciclo? Ofrecer elementos para responder a estas preguntas es la finalidad de este documento. En el mismo se abordan los siguientes aspectos:

- Problemas "de multiplicación" desde primer año.
- La presentación del signo x en segundo año.
- Diferentes tipos de problemas multiplicativos en EGB 1 y EGB 2.
- Estrategias de cálculo en EGB 1 y EGB 2.
- La multiplicación como objeto de estudio en EGB 3.
- Una propuesta de distribución de contenidos por año

Incluiremos breves relatos del trabajo realizado en las aulas y producciones de alumnos. Agradecemos a todos los docentes que participaron en los encuentros y que nos autorizaron a difundir su trabajo.

Horacio Itzcovich y Claudia Broitman

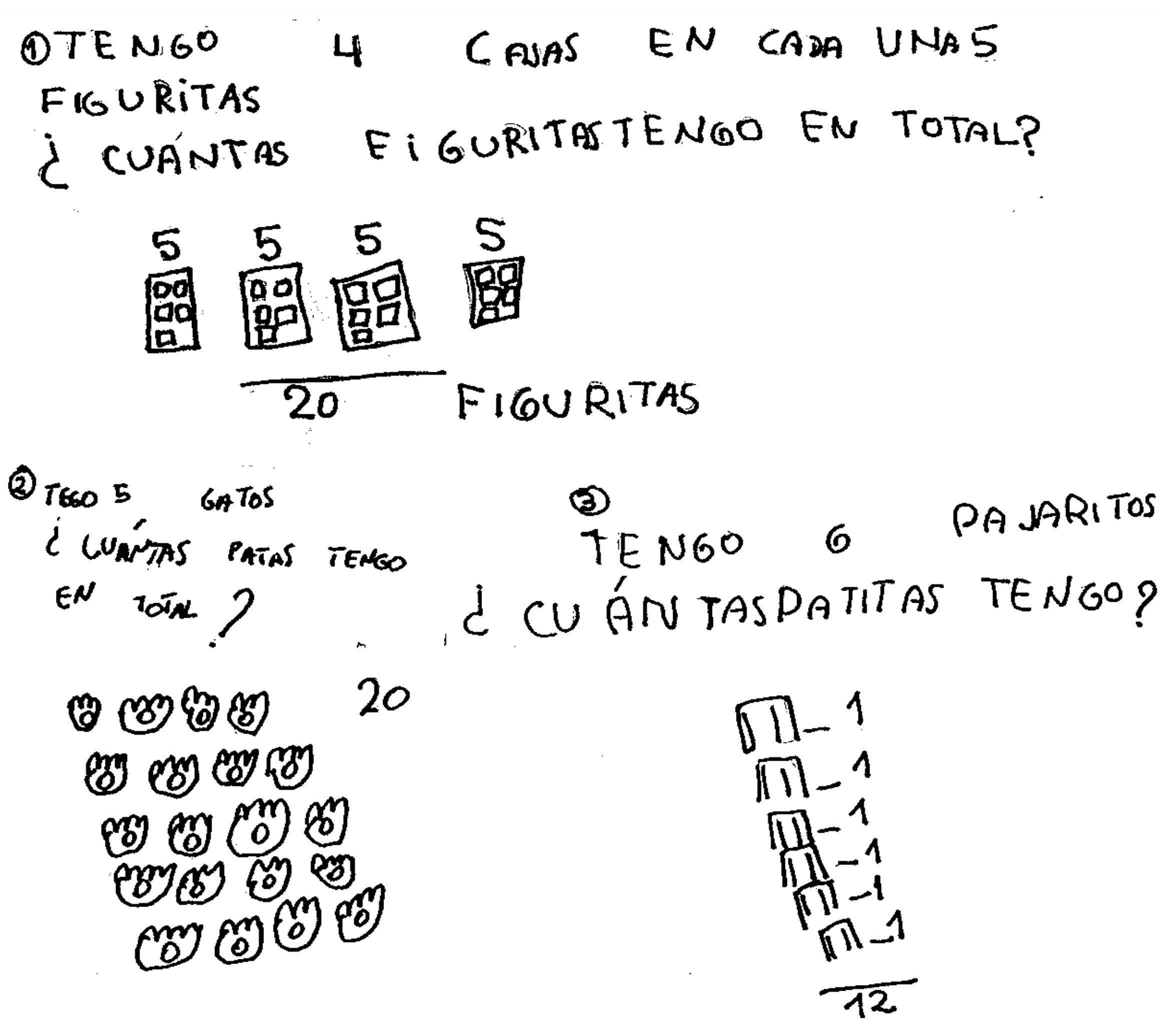
1) Problemas “de multiplicación” desde primer año

Del mismo modo que ha sido planteado para los problemas de reparto y partición (Doc. 2/01), los niños pueden abordar el estudio de ciertos problemas multiplicativos aún cuando no dominen estrategias de cálculo ni la utilización del signo x . ¿Cómo resuelven entonces los problemas? Tomemos por ejemplo un problema como el siguiente: *“¿Cuántas patas tienen 5 perros?”* Como los alumnos de primer año o principios de segundo aún no disponen de recursos de cálculo multiplicativo, movilizarán diferentes recursos para su resolución: dibujar, contar, sumar, etc.

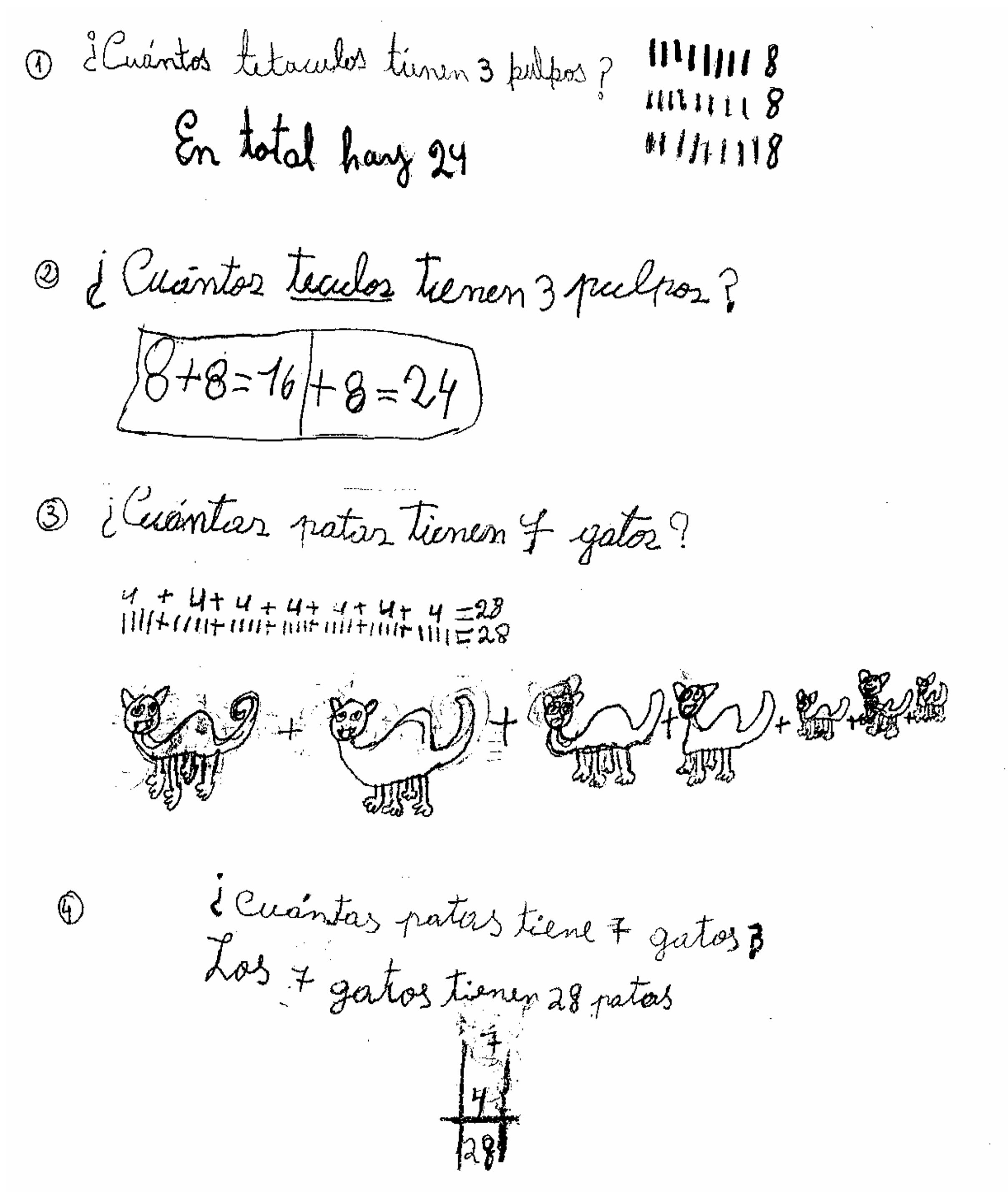
Presentar a los niños desde los inicios de primer año problemas multiplicativos tiene diversos objetivos. Por un lado, generar condiciones propicias en el aula para abordar conocimientos y actitudes vinculados al quehacer matemático, a la tarea de resolver problemas y al análisis de los mismos. Se trata de que los alumnos puedan interpretar situaciones nuevas para las cuales no tienen un recurso experto y desarrollen confianza en su posibilidad de construir estrategias personales válidas que podrán ser comparadas buscando similitudes y diferencias, juzgando su validez, analizando su economía, etc. En segundo lugar, la inclusión de este tipo de problemas apunta a promover el estudio en sí mismo de situaciones multiplicativas, estudio evidentemente provisorio que exigirá progresivos acercamientos en años siguientes.

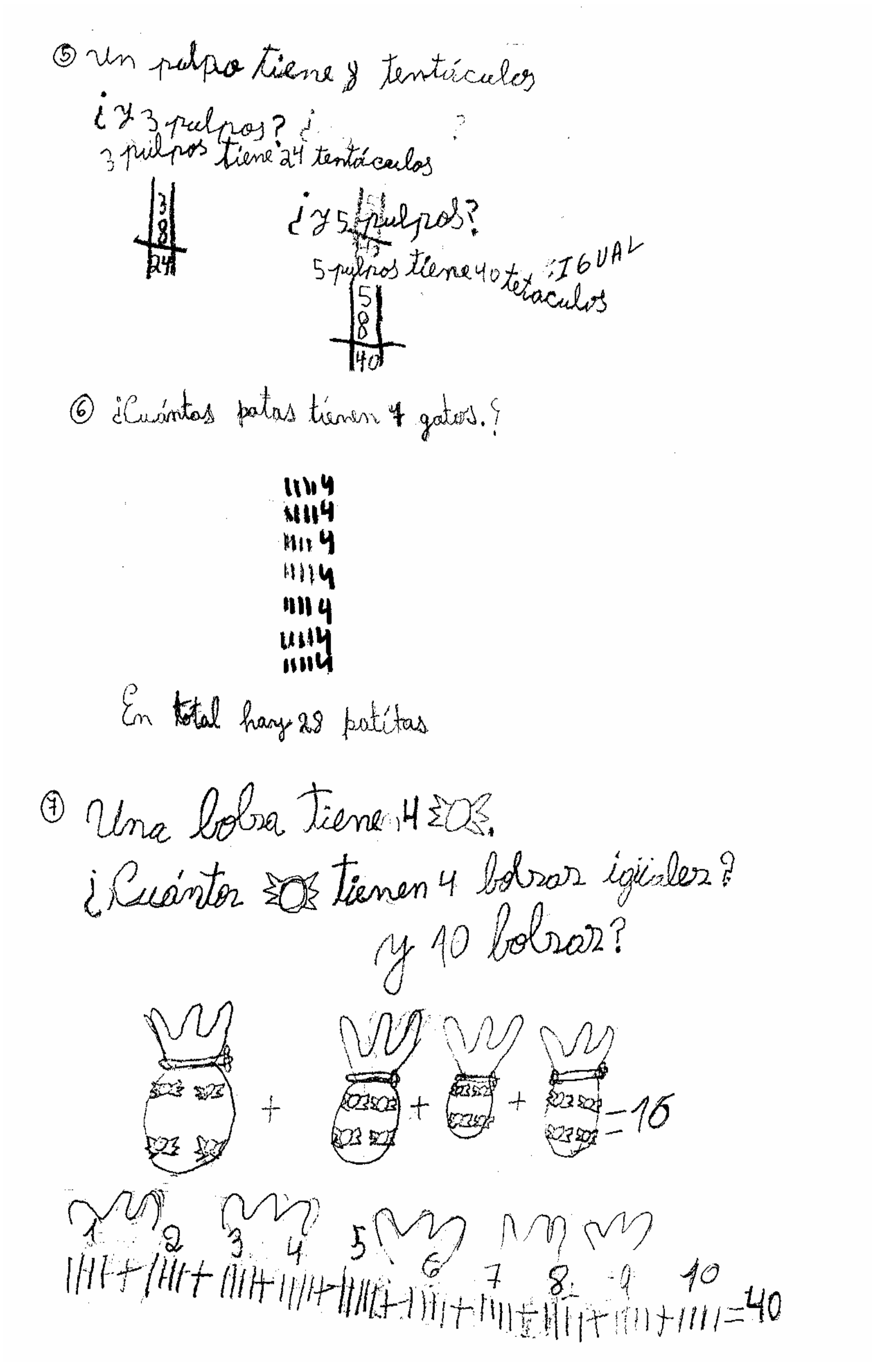
En los encuentros con los docentes hemos analizado un conjunto de problemas posibles a ser presentados a los niños en primero o segundo año, por ejemplo: “*¿Cuántas patas tienen 6 perros?” , “¿Cuántas figuritas en cuatro paquetes si en cada uno hay 5 figuritas?*, etc. El trabajo de análisis realizado consistió principalmente en anticipar los procedimientos de resolución de los niños, imaginar qué errores podrían producir y prever que tipo de intercambios se intentaría promover en las aulas. Luego presentaron algunos problemas a sus alumnos. Entre los procedimientos más frecuentes aparecen los dibujos y luego el conteo de elementos, el conteo oral y la escritura del resultado. Otros niños utilizan marcas (rayitas) y registran los resultados parciales acumulativos. Y aparecen también cálculos de sumas reiteradas.

Veamos algunas producciones de los niños de la Escuela Nº 24 de Boulogne:



También en la Escuela Nº 8 José Estrada en Bella Vista, San Miguel, las maestras de primero y segundo año Telma del Valle y Marcela Cicchini coordinadas por la vicedirectora Patricia Reinoso proponen a sus alumnos algunos problemas.





Es interesante observar cómo este niño cambia de procedimiento frente al aumento de la cantidad de elementos a contar. Empieza con dibujos, pero luego resuelve el último problema utilizando rayitas. Estas diferentes formas de resolución no son “niveles” por los que los niños deben atravesar, los mismos alumnos utilizan uno u otro modo de resolución según los datos y el tipo de objeto al que hace referencia la situación.

Un error típico en el tratamiento inicial de estos problemas es la utilización de la suma de ambas cantidades involucradas. Por ejemplo para un problema como el siguiente *"Tengo 4 floreros y en cada uno 6 flores ¿Cuántas flores en total?"* sumar el 4 y el 6. Será necesario un trabajo alrededor de esta escritura para considerar que la suma es pertinente en este problema, pero no ésa. Por ejemplo, se espera que los alumnos puedan formular expresiones tales como: "*podés sumar, pero sumás otros números", "en estos problemas se suma muchas veces el mismo número", "se puede sumar muchos 6, pero no 6 + 4"*, etc.

Se ha analizado con los docentes que, en caso de que este error no apareciera, es interesante hacer una intervención didáctica específica para incluir el debate alrededor del mismo con la finalidad de que los alumnos expliciten por qué la suma de los dos números que aparecen en el problema no permite su resolución. Una posible intervención es : *"Un alumno de otro primero dijo que este problema se podía resolver con esta suma: 4 + 6, ¿ustedes qué piensan?"* Otras posibles intervenciones posteriores para abordar esta distinción podrían ser las siguientes: proponer a los niños que inventen y expresen oralmente problemas para 4 + 6 y que los comparen con éste; analizar con los niños con qué sumas sí puede resolverse este problema y por qué.

Luego de la resolución de los problemas, los docentes de primero y segundo años han propuesto a sus alumnos analizar conjuntamente ciertos aspectos de la resolución. Evidentemente fue necesario trabajar durante dos o tres clases con diferentes problemas para abordar estas discusiones con los alumnos y dar oportunidades a que avancen en sus conocimientos. Algunas discusiones que promovimos en las aulas fueron:

- La necesidad o no de dibujar todos los elementos del problema. Por ejemplo para el problema en el que hay que calcular cuántas patas tienen 5 gatos: "*¿Hace falta dibujar los gatos?, ¿se puede resolver el problema dibujando solamente uno?".* Los alumnos dicen que *"no hace falta dibujar todos",* o que *"se puede dibujar uno solo y contar muchas veces las mismas patas"*. El maestro enfatiza esta conclusión para ser tenida en cuenta en próximos problemas similares.
- La posibilidad de usar marcas que representen a los elementos. Por ejemplo, para el mismo problema: *"Algunos chicos dicen que no hace falta dibujar todos los gatos, que se pueden dibujar directamente las patas?* Se espera que los alumnos analicen la economía de realizar marcas que representen los elementos en comparación con un dibujo más realista, por ejemplo: *"es más fácil hacer solo las patas que dibujar todos los gatos", "si hacés puntitos o rayitas para cada pata tardás menos" .*
- La conveniencia de organizar espacialmente las marcas y de registrar datos parciales. Por ejemplo: *"¿Conviene hacer las patas todas juntas o separadas de a 4?, ¿les parece útil ir anotando cuánto va sumando o cuántos gatos ya se representaron?* Se apunta a que los niños tomen conciencia de que la organización espacial y el registro numérico de las cantidades parciales favorece el control del propio procedimiento. Por ejemplo: *"es más fácil contar después si están separadas, como si fueran las de cada gato", "te conviene anotar arriba de las patas con números cuántos van"*.
- La posibilidad de representar el problema sólo con números. Por ejemplo: *"Algunos chicos no dibujaron nada y pusieron números ¿Se puede resolver este problema con números?" o "Algunos chicos escribieron cuentas de más?, ¿cuáles sirven par este problema?,* etc. Los chicos dicen que *"no hace falta hacer las patas, podés poner cuatros", "podés sumar muchos 4"*, etc. Se apunta a que los niños reconozcan la suma reiterada como un recurso más económico que dibujar o hacer rayitas.
- Analizar que la suma de los números del problema no es pertinente. Por ejemplo: *"Algunos chicos – de este grado si aparecieron o de otro grado si no aparecieron – hicieron la suma 4 + 6 ¿Ustedes qué piensan?"* Se intenta analizar, como ha sido señalado, que esta suma no representa este problema. Los chicos dicen "*Esa cuenta no es para este problema, te da 10 y hay 24 patas" o "tenés que sumar muchos cuatros, no uno solo"*, etc.

Los docentes en los encuentros señalaron la complejidad de los diferentes tareas que exigía este conjunto de clases. Entre otras:

- generar un clima de trabajo intelectual propicio para la producción de estrategias, para que los alumnos tengan confianza en que podrán encontrar formas diversas y personales para enfrentar la situación.
- mostrar a los alumnos que un mismo problema puede abordarse por diferentes caminos y con variados recursos.
- organizar la comunicación de procedimientos. Seleccionar sólo producciones de cuatro o cinco alumnos contemplando que haya variedad de formas de resolución. Los niños comunican las respuestas y procedimientos usados.

- proponer la comparación de resultados y de procedimientos explicitando la posibilidad de apropiarse de una estrategia producida por otros.
- gestionar el análisis colectivo de los errores, de modo tal, que todos los alumnos - y no solo quienes los han producido- analicen por qué dicho cálculo o dicha estrategia no era viable en esta situación.
- promover la comparación y análisis de las ventajas de cada procedimiento.
- plantear situaciones hipotéticas válidas o erróneas (*"otro alumno me dijo que ...¿ustedes qué piensan?*) promoviendo el debate entre los alumnos.
- registrar en una cartelera las diferentes estrategias para que los niños puedan reutilizarlas.
- registrar las conclusiones a las que se ha arribado para que los niños puedan avanzar en las formas de resolver siguientes problemas
- mostrar la dirección y la evolución del trabajo porque permite a los niños tomar conciencia de sus aprendizajes. (Por ejemplo*: "ya resolvimos dos o tres problemas parecidos y muchos chicos ahora ya no se confunden para contar los puntitos*", o bien "*qué interesante, ahora mucho de ustedes resuelven los problemas con números y ya no precisan dibujar como hacían antes")*.
- evocar las conclusiones y avances en clases siguientes (por ejemplo: *"ahora vamos a resolver otro problema, pero antes vamos a recordar lo que hicimos ayer y qué dificultades tuvimos")* con el fin de ofrecer una nueva oportunidad para entender o reconocer una estrategia producida por otros o el sentido del debate ya producido.

Los docentes enfatizaron los conocimientos de los que los niños disponían y cómo éstos no habrían aparecido si hubiéramos presentado exclusivamente problemas para los cuales los niños tuvieran dominio de los cálculos. Mostraron también la potencia del trabajo colectivo y los importantes avances en las estrategias de resolución de los niños entre una y otra clase.

2) La presentación del signo X en segundo año.

Hemos señalado que para los niños no es necesario conocer el signo x para resolver problemas multiplicativos. ¿Cuándo y cómo incorporarlo? Propusimos a los docentes de segundo año su incorporación como escritura sintética de las sumas reiteradas que producen los niños para resolver diversos problemas. Hemos analizado diferentes problemas que permiten introducir el signo x en segundo año luego de que los niños han desplegado y analizado una variedad de estrategias de resolución de problemas como las reseñadas en el primer punto.

Un problema posible es el siguiente: se les entrega a todos los grupos de niños un mismo listado de cálculos "largos" de sumas reiteradas[1]. Cada grupo recibe además una tarjeta con uno de esos cálculos y debe enviar el mensaje a otra pareja con la que juega para que identifiquen qué cálculo han recibido. No pueden escribir ese mismo cálculo. Por ejemplo, para 13+13+13+13+13+13+13+13+13+13+13+13+13+13+13+13+13+13 podrán utilizar inicialmente como mensaje "sumás 18 veces el número 13" . La restricción posterior de escribir el mensaje más corto posible permite hacer aparecer la escritura 18 x 13 como forma sintética de esta suma.

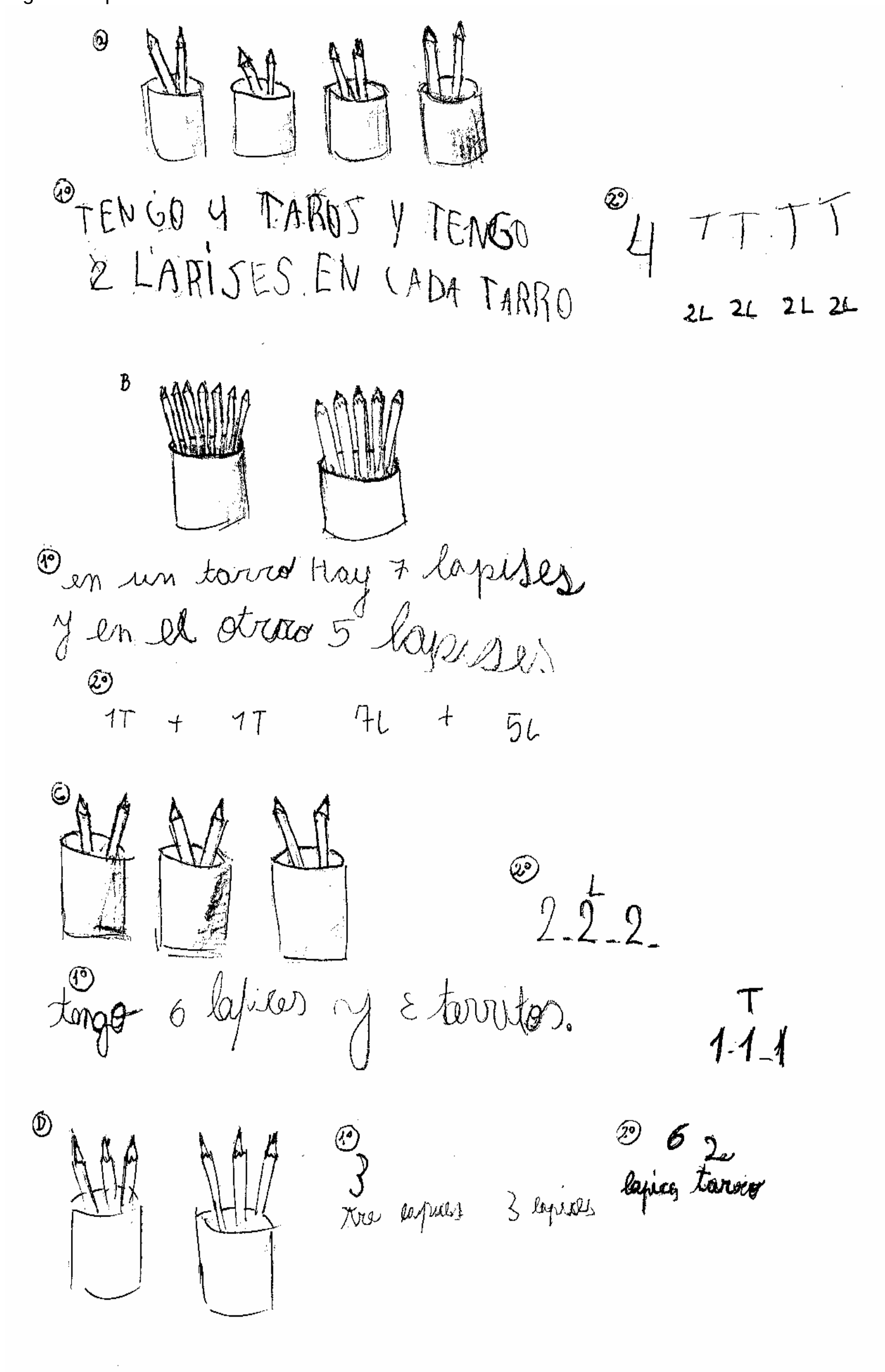
En otro juego de comunicación los niños reciben por grupos una cierta cantidad de sobres –todos iguales- que contienen en su interior una cantidad de fichas –todos la misma cantidad -[2]. Los niños tienen que escribir el mensaje más corto posible para que otro grupo averigüe cuáles y cuántos sobres recibieron. El equipo que recibe el mensaje debe identificar los sobres recibidos por el otro grupo. Este mensaje no puede incluir dibujos. Se intenta favorecer una evolución desde expresiones en lenguaje natural (5 sobres de 4 fichas cada uno) a un lenguaje simbólico ("4+4+4+4 " y posteriormente 5x4).

También en otro juego de mensajes cada grupo de niños recibe una tarjeta que tiene un dibujo de flores con sus pétalos[3]. En algunos casos todas las flores poseen la misma cantidad de pétalos. Cada equipo tiene que enviarle un mensaje –sin dibujos- a otro equipo para que puedan reconocer cuál es la tarjeta que eligieron. Posiblemente los niños escribirán inicialmente mensajes como "hay 6 flores y 5 pétalos en cada flor". Luego se pueden ir agregando restricciones como "escribir el mensaje más breve posible" para provocar que los niños produzcan expresiones tales como "6 veces 5", "6 flores, 5 pétalos cada una", etc. Estas actividades continúan con el dibujo de mensajes a partir de escrituras multiplicativas que

[1] Tomado de Cerquetti-Aberkane (1998): "Enseñar matemática en los primeros ciclos". Edicial. Bs. As.
[2] Tomado de INRP (1986): "Apprentissages a la résolution des problemes au cours élémentaire" Ermel, Francia.
[3] Tomado de Parra, C. y Saiz, I. (1994): "Multiplicación en segundo grado". Ficha mimeografiada

pueden estar propuestas por el docente. Luego se realiza un trabajo de distinción de mensajes a partir de dibujos presentados: en algunos se puede escribir una multiplicación (por ejemplo 5 canastas, todas con 3 manzanas, 5 x 3) y en otros no es posible (por ejemplo 3 canastas, una con 5 manzanas, otras dos con 6 manzanas, 5 +6+6).

En la escuela Nº 6 de Ayacucho, la maestra de segundo año propone esta actividad a sus alumnos a partir de tarjetas con lapiceros y lápices. Estos son algunos de los mensajes enviados. Se presenta la tarjeta que los niños han recibido , el primer mensaje elaborado, y el segundo a partir de la restricción de la brevedad del mismo.



Estos mensajes fueron reelaborados conjuntamente para llegar a las escrituras aditivas primero y multiplicativas después, en el caso en que éstas fueran posibles. Para el de cuatro tarros con dos lápices cada uno : 2+2+2+2 y luego 4x2; para el de dos tarros de 3 lápices cada uno retomar 3+3 , escritura que apareció y luego elaborar 2x3, etc. Será necesario acordar con los alumnos que el primer número corresponde a la cantidad de latas y el segundo a la cantidad de lápices por lata, ya que sino, podría corresponder a un dibujo de tres latas con dos lápices cada uno.

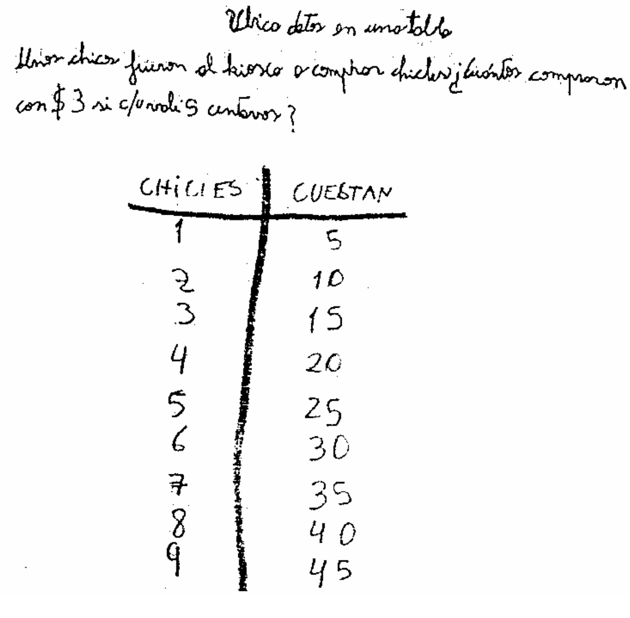
Estos juegos de comunicación también pueden proponerse con cuadriculados[4]. Por ejemplo, se les entrega a los niños diferentes rectángulos recortados en hojas cuadriculadas (5x6, 6x8, etc.) y se les plantea: *"¿Cómo enviar el mensaje más corto posible que indique cuál es el rectángulo que recibieron?"* Enviar el total de cuadraditos no permite resolver el problema, ya que hay varios que admiten la misma cantidad (con 24 podría ser 12 x 2 ó 6 x 4). Luego se les puede proponer a los niños que dibujen los cuadriculados a partir de escrituras multiplicativas dadas o que vinculen cada rectángulo con los mensajes que admite. En este problema, a diferencia de lo que sucede con los lapiceros, es equivalente el mensaje 6 x 4 que 4 x 6, ya que corresponden al mismo dibujo.

3) Diferentes tipos de problemas multiplicativos en EGB 1 y EGB 2.

Sabemos que muchos niños saben "hacer las cuentas" pero no reconocen cuál es el conjunto de problemas que se resuelven con dicha operación. Por ello, hemos propuesto trabajar una variedad de problemas multiplicativos en todos los años: problemas de proporcionalidad, de organizaciones rectangulares y de combinatoria.

Todos los problemas anteriormente analizados son problemas que involucran la relación entre dos series proporcionales: gatos y patas, paquetes y figuritas, pulpos y tentáculos, etc. Evidentemente, no es objetivo de primer ciclo que los alumnos reconozcan las propiedades de la proporcionalidad, pero sí que empiecen a utilizarlas intuitivamente para resolver problemas. En primer año y principios de segundo se espera que los niños los resuelvan por procedimientos variados, como hemos visto. Cuando los niños, en segundo año ya conocen las escrituras multiplicativas, se espera que puedan utilizarlas, aún cuando los recursos de cálculo sean principalmente las sumas. En tercer año, se espera que los alumnos puedan resolver estos problemas por medio de cálculos multiplicativos.

Verónica Wagner, maestra de tercer año de la EGB Nº 46 de Lobería, propone a sus alumnos la construcción de una tabla de proporcionalidad a partir de los datos de un problema. Vemos aquí una parte de la tabla que construye un alumno (en realidad continúa hasta los 3 $):


Ubico datos en una tabla
Unos chicos fueron al kiosco a comprar chicles ¿cuántos compraron con $ 3 si c/u vale 5 centavos?

CHICLES	CUESTAN
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25
6	30
7	35
8	40
9	45

[4] Tomado de Parra, C. y Saiz, I. (1994): "Multiplicación en segundo grado". Ficha mimeografiada.

Un trabajo sistemático de análisis de estas tablas permite a los niños tomar conciencia de la regularidad de las series numéricas involucradas (“*al doble de gatos el doble de patas”, “para un gato más le sumo cuatro más”, “yo voy de cuatro en cuatro y completo la tabla”*, etc.) y empezar a reconocer y reutilizar ciertos productos (*“dos veces cuatro son ocho, ya me lo aprendí, yo ya se que es cuatro, ocho, doce, después no me acuerdo más”)*.

En el segundo ciclo la proporcionalidad se considera objeto de trabajo en sí misma, esto implicará plantear problemas a partir de los cuales los alumnos puedan estudiar sus propiedades (la constante de proporcionalidad, la propiedad de que al doble el doble, al triple el triple, que sumando los elementos de la series se conserva la propiedad, etc.), sus diferentes formas de representación (tablas, gráficos, etc.) y también los límites, es decir reconocer que para algunos problemas no existe una relación de proporcionalidad (relación entre edad y peso, entre consumo de TE y precio, tablas con ofertas, etc.)[5] .

Hemos analizado con los docentes la importancia de que los alumnos puedan resolver los problemas por medio de diferentes procedimientos. Para un problema en el que parte de los datos informan que 20 cajas de mercadería pesan 60 kg. y hay que averiguar cuánto pesarán 30, 60 y 120 cajas iguales, los niños podrán apelar a diferentes procedimientos. Por ejemplo:
- como 60 es el triple que 20, considerar que 60 cajas pesarán el triple que 20, luego a partir de ese dato obtener 30 calculando la mitad del peso de 60 y 120 como el doble.
- Calcular cuánto pesa cada caja y recién luego calcular cuánto pesan 30, 60 y 120 multiplicando esos números por el peso de una caja.
- Calcular primero el peso de 30 cajas y de 60 cajas (de alguna de las dos formas anteriores) y luego para calcular el peso de 120 cajas sumar el peso de 60 y dos veces el de 30 cajas o dos veces el de 60 cajas o cuatro veces el de 30 cajas.

Cada procedimiento pone en juego propiedades diferentes de la proporcionalidad:

Cajas	Peso
20	60
60	60 x 3= 180

“Al doble de cajas corresponde el doble de peso; al triple el triple; a la mitad, la mitad, etc.”

Cajas	Peso
20	60
1	60: 20= 3
60	3 x 60= 180

“Cálculo de la constante de proporcionalidad que corresponde al valor de la unidad”

Cajas	Peso
30	90
+ 30	+ 90
60	180
120	360

“Si se suman los valores de las series se mantiene la proporcionalidad”

En el segundo ciclo los alumnos podrán poner en juego intuitivamente estas propiedades en sus propios procedimientos a partir de dos o tres problemas iniciales. Estas propiedades podrán ser explicitadas en el trabajo colectivo luego de la comparación de estrategias de resolución. Se apuntará a que todos los alumnos puedan apropiarse de las diferentes formas de resolver el problema y comiencen a nombrar las propiedades que usan, aunque no sean con nombres convencionales “al doble el doble”, “averiguo cuánto vale uno y después multiplico”, “si sumo estos datos también puedo sumar estos y me da”, etc.

En problemas posteriores también es interesante analizar con los alumnos la conveniencia de usar una u otra propiedad según los datos involucrados. Por ejemplo:

[5] Para la enseñanza de la proporcionalidad en el segundo ciclo consultar: Panizza, Sadovsky, 1992 ; Documento 4 GCBA, 1997; Pre Diseño GCBA, 1999; etc.

Cantidad	Precio
5	125
17	
19	
32	

Para estos datos evidentemente conviene calcular el valor de la unidad.

Cantidad	Precio
15	37,5
30	
45	

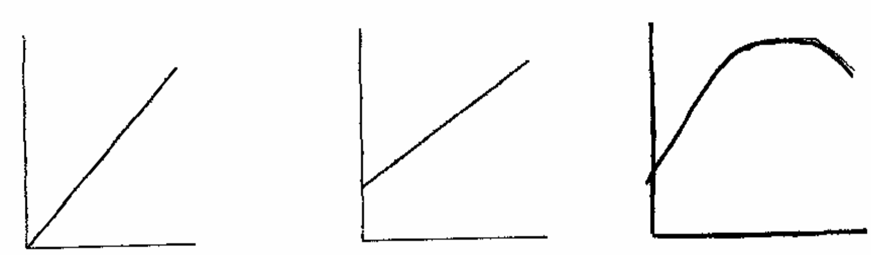
Para este caso es conveniente utilizar la propiedad “al doble, el doble; al triple, el triple, etc.”

Cantidad	Precio
5	12,50
20	50
25	

Y en cambio, para estos datos es económico sumar los precios de 5 y de 20 para calcular el precio de 25.

La formas de presentación de los problemas pueden ser muy variadas: tablas, cuadros de doble entrada, gráficos, enunciados verbales, y con diferente cantidad de datos. Los alumnos del segundo ciclo podrán también enfrentarse a problemas que involucren un análisis de gráficos de coordenadas. Por ejemplo:

Determinar qué gráfico corresponde a cada relación:
- distancia recorrida en taxi y valor del viaje
- edad y altura promedio
- cantidad de paquetes y total de figuritas



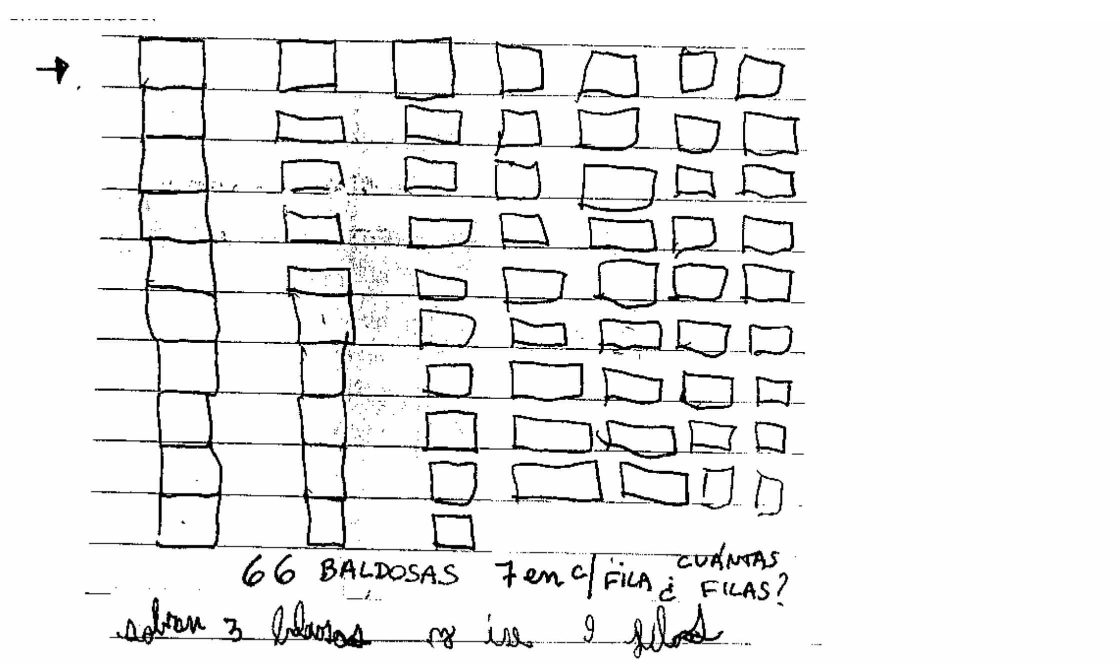
Hemos mencionado que el estudio de la proporcionalidad involucra también analizar sus límites, es decir reconocer diversos tipos de problemas para los cuales no es posible, o no es suficiente con este concepto. Para ello, hemos propuesto a los docentes la presentación de situaciones que no sean de proporcionalidad con el fin de que los alumnos tengan que analizarlas y tomar decisiones acerca de si estas propiedades están o no presentes y si el problema tiene o no solución. Por ejemplo, en cuarto año problemas sin solución que involucren la relación entre edad y peso *“Un niño de 10 años pesa 30 kg. Calcular cuánto pesará a los 20,30, 40 y 50 años*” . Y en quinto y sexto años incluir problemas en los que hay relaciones entre variables que si bien no responden a una relación de proporcionalidad, sí puedan resolverse. Por ejemplo, aquellas en las que es necesario considerar un valor inicial “*Un señor siempre hace un viaje en taxi de 10 cuadras y paga $ 3,20. Quiere hacer un viaje de 20 cuadras ¿costará el doble?*” o bien problemas que involucran el cálculo del costo del gas o del TE según el consumo analizando que la tarifa básica o el costo del servicio mínimo producen que no se trate de una relación de proporcionalidad (al doble de consumo no corresponde el doble de gasto). Los alumnos podrán usar sus conocimientos sobre la proporcionalidad para resolver parte del problema, pero será necesario que tengan en cuenta el valor fijo que hay que agregarle luego.

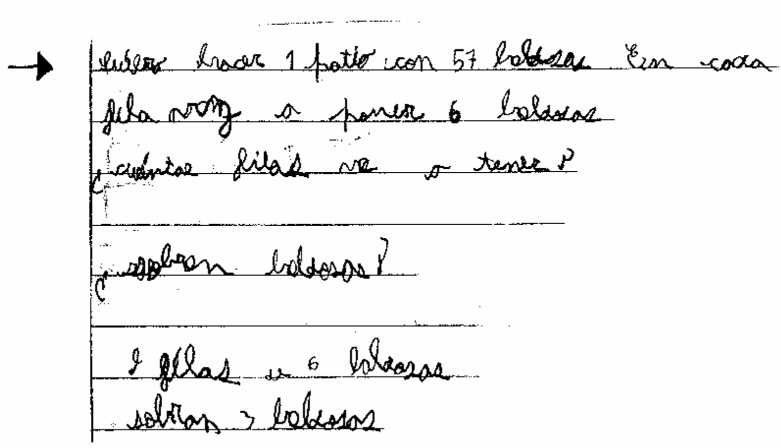
Si bien los ejemplos mencionados refieren a situaciones de proporcionalidad directa, los alumnos del segundo ciclo pueden resolver situaciones sencillas de proporcionalidad inversa que les permitan ser resueltas utilizando intuitivamente sus propiedades y luego, a partir del trabajo colectivo promover su explicitación y comparación con las situaciones de proporcionalidad directa[6].

Otro tipo de problemas multiplicativos posibles de ser presentados desde el primer ciclo, son aquellos que involucran organizaciones rectangulares. Por ejemplo, problemas de baldosas, de filas y columnas (como los de asientos del cine, butacas para un acto escolar, departamentos en un portero eléctrico, remedios, etiquetas u ojalillos que vienen en una plancha, etc.). Inicialmente los niños los resolverán contando, luego sumando y finalmente - luego del trabajo dirigido al análisis de dichos problemas y de los recursos posibles - podrán resolverlos multiplicando. Muchos niños que reconocen la multiplicación para los problemas de series proporcionales (¿Cuántas figuritas hay en 4 paquetes si tienen 5 figuritas cada una?) no la reconocen para problemas con los mismos números en problemas de organizaciones rectangulares (¿Cuántos cuadraditos hay en un cuadro como éste - dibujo de rectángulo de 5x4?)

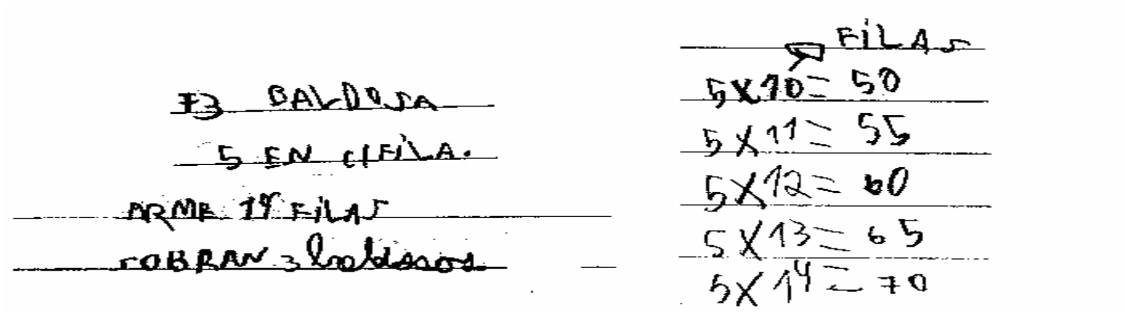
Una herramienta didáctica para provocar el avance de los procedimientos de conteo hacia los procedimientos de multiplicación es el aumento de la cantidades, por ejemplo de los cuadraditos del problema. La dificultad que se les presenta a los niños en contar una gran cantidad de cuadraditos (un cuadro de 12 cuadraditos por 5) favorecerá que algunos alumnos registren al lado de cada fila o columna las cantidades parciales (5,5,5,5, etc. o bien 12, 12, 12, etc.) y que luego sumen para obtener el total.

Mónica Capurro, maestra de tercer año de la Escuela Nº 1 Bartolomé Mitre de Marcos Paz, propone a sus alumnos la resolución de un conjunto de problemas en los que hay que realizar embaldosados.

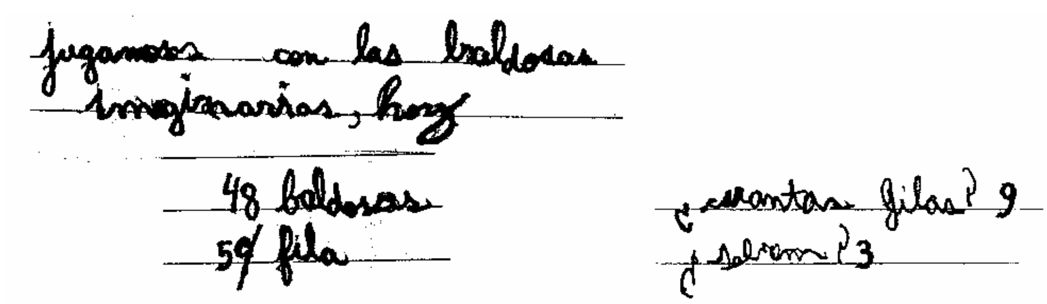




[6] Para ampliar sobre la enseñanza de la proporcionalidad en el segundo ciclo se puede consultar el Pre Diseño del segundo ciclo del GCBA,1999, apartado “Relaciones entre variables”.



Es interesante destacar aquí cómo la docente, luego de permitir que los alumnos trabajen con baldosas recortadas o dibujadas, plantea situaciones hipotéticas de embaldosado - en las que ya no se presentan dibujos ni baldosas - con la finalidad de que los niños avancen en sus procedimientos. Para resolver los problemas los niños se pueden apoyar en los productos memorizados o usar la tabla pitagórica para consultar números cercanos menores a partir de los cuales calcular las baldosas que sobran.



En el segundo ciclo, los problemas de organizaciones rectangulares podrán ser un buen punto de partida para el estudio de las propiedades de la multiplicación. Por otra parte, este tipo de situaciones podrá permitir ser una base hacia el posterior estudio en quinto o sexto año, de la multiplicación como medio de cálculo en problemas de superficie.

Otros problemas multiplicativos que los niños pueden empezar a resolver son aquellos en los que hay que combinar elementos de diferentes colecciones[7]. Por ejemplo: *"Voy a comprarme un helado de dos gustos. Si quiero combinar una fruta y un dulce, cuántos helados diferentes puedo elegir?*

Frutas	Dulces
Limón Frambuesa Durazno	Crema Chocolate

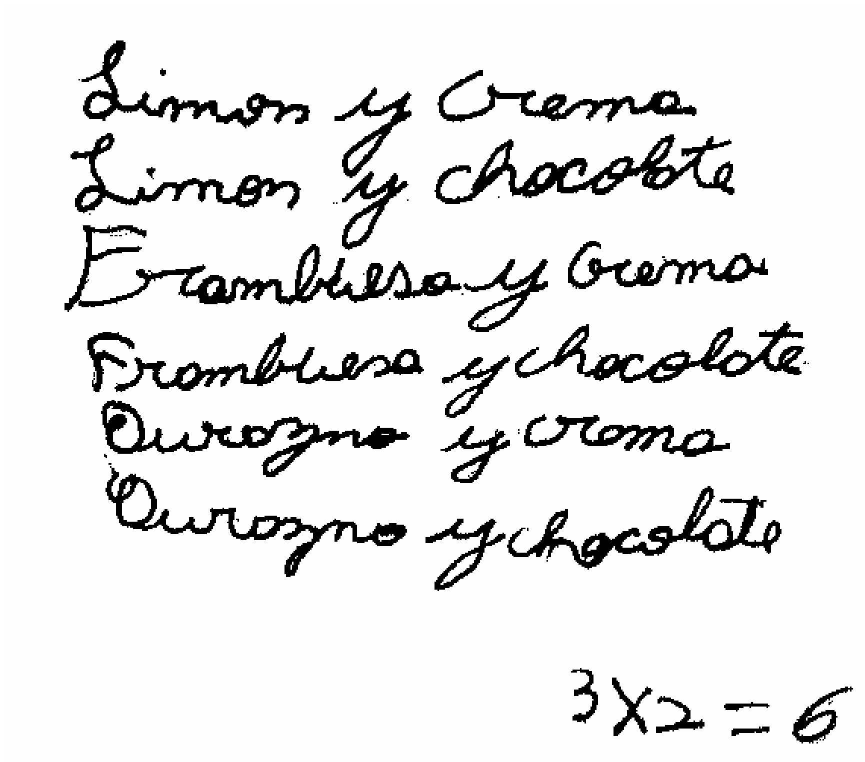
Se podrá trabajar en la clase a partir de los procedimientos que los niños utilicen cómo garantizar que pusieron todas las opciones. Luego de las primeras producciones de los niños se les puede proponer organizar la información en un cuadro de doble entrada o en un diagrama de árbol.

	Chocolate	Crema
Limón	L – Ch	L- C
Frambuesa	F- Ch	F-C
Durazno	D – Ch	D- C

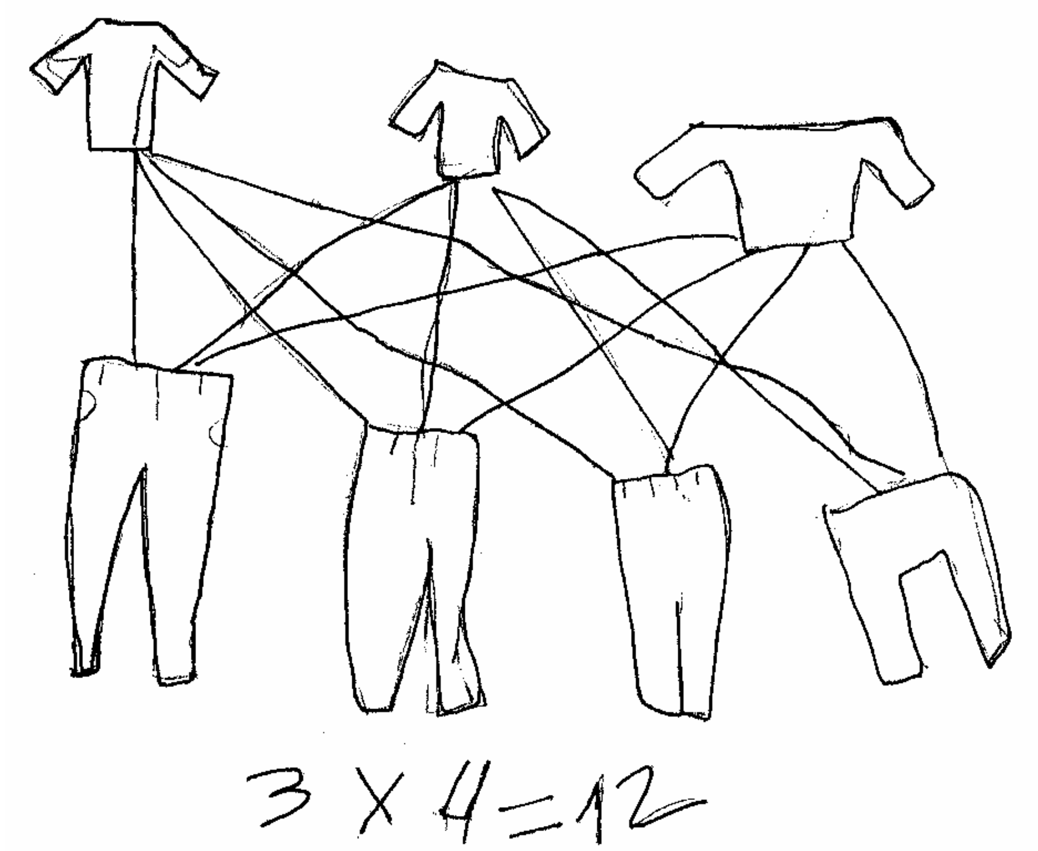
Los niños, luego de varios problemas, podrán utilizar progresivamente estrategias que les permitan organizar la información y "no olvidarse " de ninguna posibilidad. Posteriormente se analizará con los alumnos la pertinencia de resolverlos por medio de una suma como 2 + 2 + 2 o bien 3 + 3 y finalmente reconocer que las escrituras 2 x 3 ó 3 x 2 también representan el problema. Estos cálculos pueden ser propuestos por los alumnos o incorporados por el docente para someterlos a análisis.

[7] Para ampliar sobre la enseñanza de problemas de combinatoria en el primer ciclo consultar Broitman, 1999 y para el segundo ciclo Documento Nº 4 del GCBA, 1997.

Algunos docentes de segundo y tercer años propusieron a sus alumnos la resolución y el análisis del problema anterior de los gustos de helado:



También este otro problema: *"Tengo tres remeras y cuatro pantalones ¿Cuántos equipos diferentes se pueden armar?"*



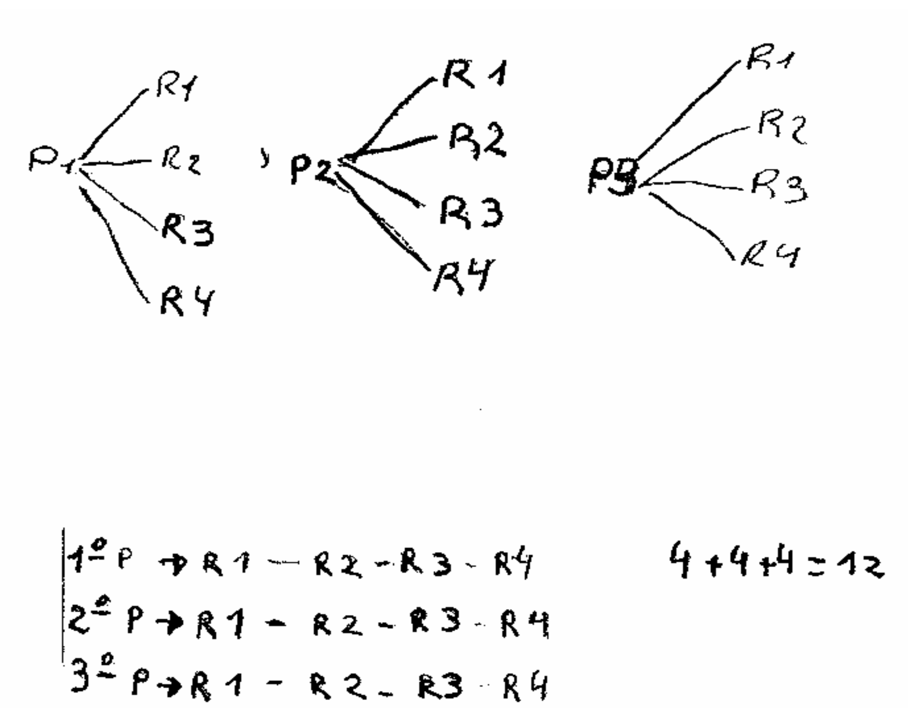
Del mismo modo que ha sido planteado para los problemas de series proporcionales en primero y segundo año, para estos problemas se promovieron discusiones con los alumnos, - en este caso de segundo y de tercer año - en torno a:

- la necesidad de combinar todos los elementos con todos los otros,
- cómo hacer para no olvidarse de ninguno,
- la conveniencia de resolverlo de varias formas para estar más seguro,
- la posibilidad de hacer dibujos, listas, cuadros de doble entrada, flechitas, etc.
- la utilidad de ir anotando al lado números para después no confundirse al contar

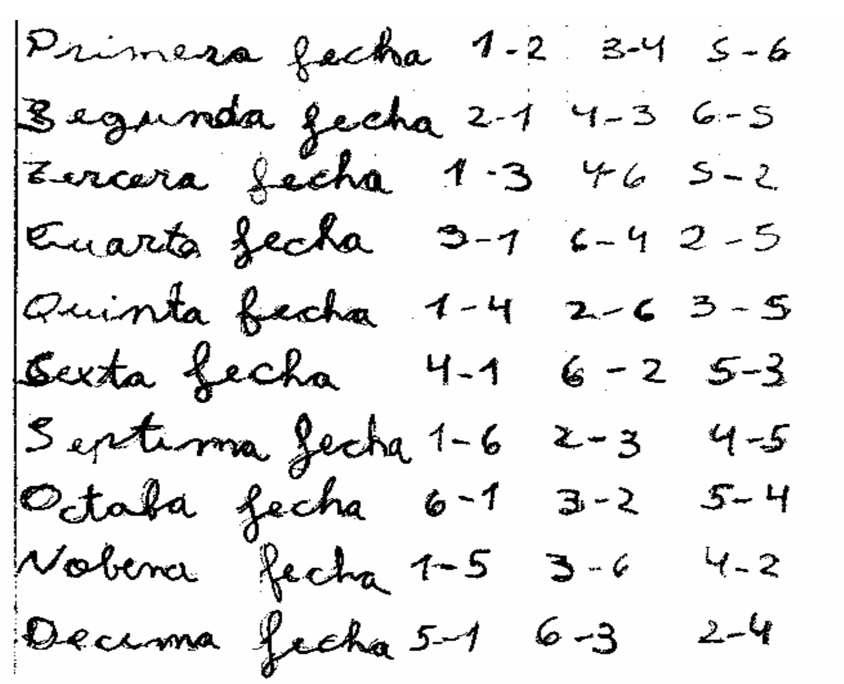
- que luego de resolver el problema se pueden hacer al final las sumas o anotar cuál podría ser la multiplicación que resolvería el problema.

Para que se produzcan avances en los procedimientos de resolución es necesario que los alumnos se enfrenten a ese tipo de problemas durante tres o cuatro clases y que el docente oriente la marcha de la clase hacia el control de la exhaustividad y la economización de estrategias.

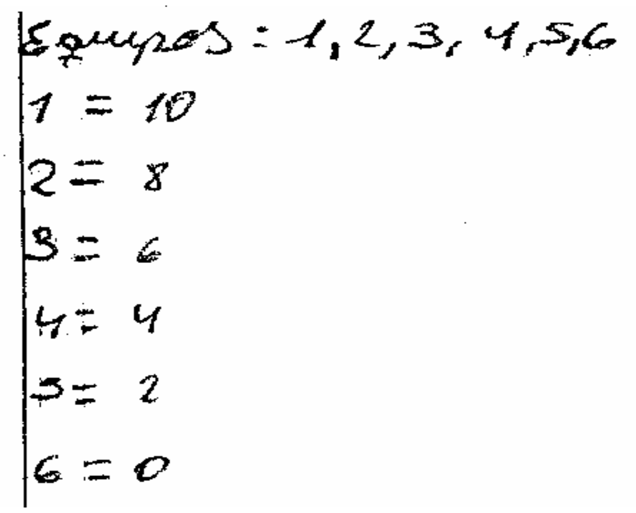
En el segundo ciclo los problemas de combinatoria pueden ser estudiados en sí mismos. Se les ha propuesto a los docentes abordar con sus alumnos un conjunto de problemas de combinatoria muy diferentes entre sí. Por ejemplo, el problema de combinar cuatro remeras y tres pantalones fue el que menos “trabajo” le dio a los alumnos, aún cuando no les fue evidente de manera alguna que la multiplicación es un recurso posible. La mayoría de los niños hizo listas, dibujos, algunos hicieron sumas y finalmente, en el momento de la puesta en común se discutió con los niños la escritura 3 x 4 como representativa también de este problema. Veamos algunas producciones de los alumnos de sexto año:



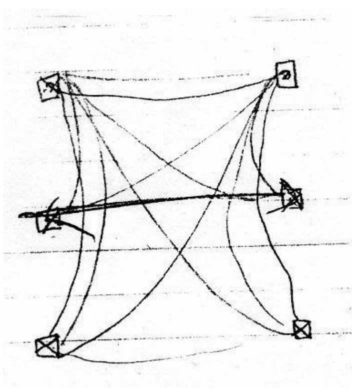
El siguiente problema es muy diferente en tanto los equipos de fútbol se combinan todos con todos, excepto cada uno consigo mismo: *“Para un torneo de fútbol participan 6 equipos. Juegan todos contra todos ida y vuelta (local y visitante).¿ Cuántos partidos se juegan en el campeonato? ¿Cuántas fechas tienen que jugar?”.* Los chicos de sexto utilizaron diversos procedimientos. Algunos hicieron la lista de todas las combinaciones por fechas:

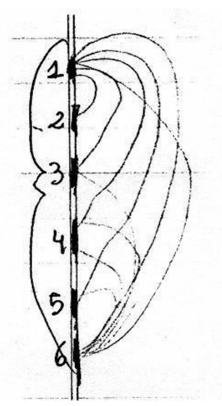


Otros pensaron 10 (el primer equipo juega con cinco equipos dos veces con cada uno) +8 (el segundo equipo también juega 10 pero dos ya están contadas) +6 (juega 10, pero cuatro ya están contadas) +4 (ídem, pero descontando 6) +2 (y así sucesivamente) +0 (ya todas contadas):

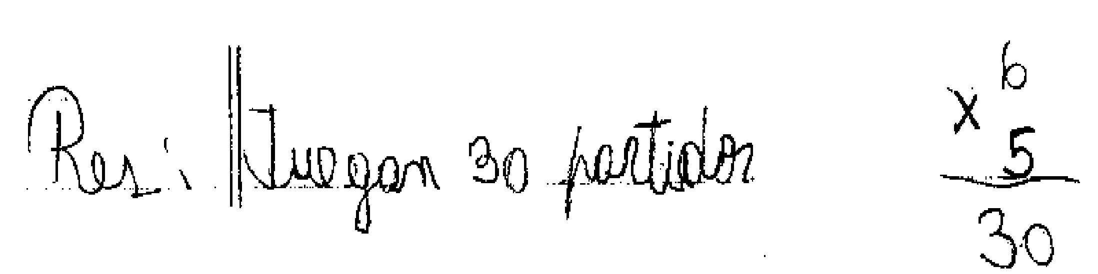


Algunos alumnos hicieron diagramas:

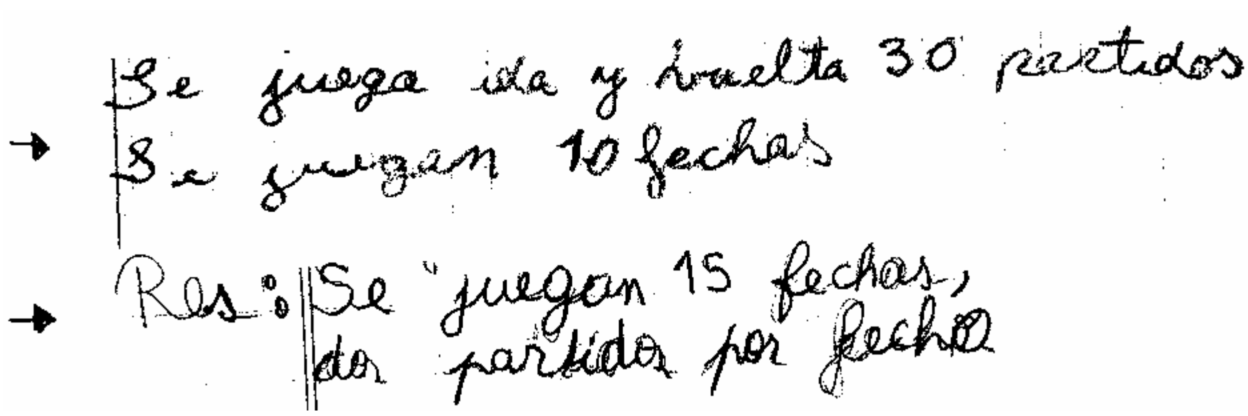




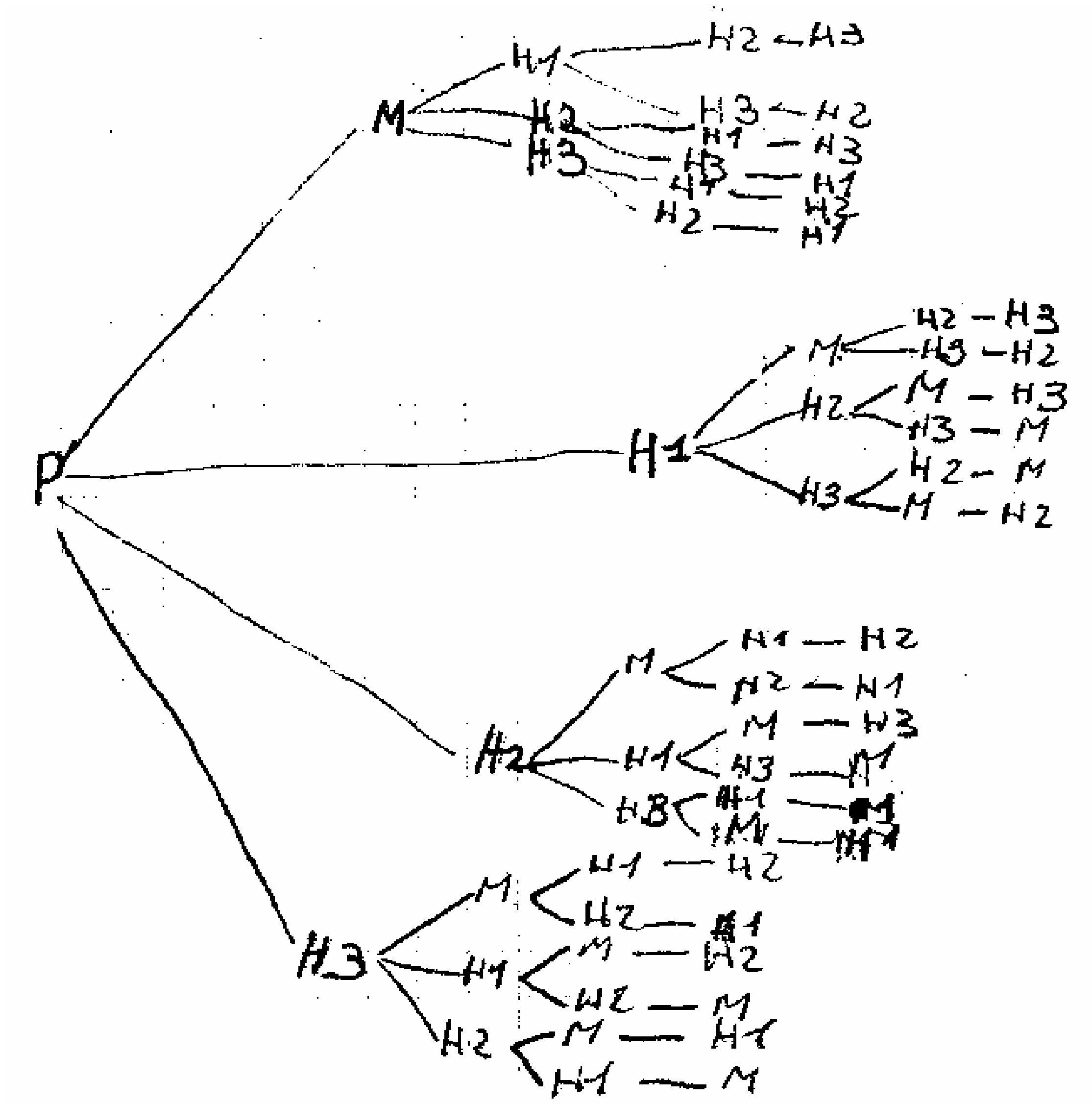
Otros hicieron cálculos multiplicativos:



Con respecto a las fechas algunos alumnos dijeron 15 fechas con dos partidos en cada una y otros pensaron 10 fechas con tres partidos en cada fecha. Esto también generó un interesante debate en la clase.



Luego de un intenso trabajo colectivo de análisis y comparación de estrategias y resultados, los docentes continuaron presentando otros problemas con nuevos desafíos al tener que analizar si cada elemento se combina o no consigo mismo, si se repiten o no las combinaciones, etc. Por ejemplo: "*El papá, la mamá y sus tres hijos quieren sacarse una foto sentado uno al lado del otro. ¿Cuántas fotos diferentes deberán sacar si quieren aparecer en todas las posibles ubicaciones?"* Veamos parte de una resolución:



Este diagrama de árbol ayuda a considerar que si el papá es el primero de la foto, esta parte se puede calcular haciendo 4 x 3 x 2 x1 y que como cada uno de los cinco miembros de la familia puede ocupar el primer lugar, entonces es posible resolverlo haciendo 5x4x3x2x1.

Otros problemas presentados a los niños fueron los siguientes: *"En un restaurante hay pan negro y pan blanco; jamón, queso y salame; mayonesa, ketchup y salsa golf; lechuga y tomate. ¿Cuántas combinaciones diferentes se pueden armar si se usa un tipo de pan, un tipo de salsa, solo una verdura y un fiambre?"* En este problema, los diagramas de árbol que los alumnos hacen son un buen punto de partida para analizar colectivamente la posibilidad de resolverlo mediante 2 x 3 x 3 x 2.

4) **Estrategias de cálculo en EGB 1 y EGB 2**.

Los niños necesitarán progresivamente disponer de un conjunto de cálculos sencillos para resolver ciertos problemas y para realizar otros más complejos (por ejemplo es necesario saber 9 x 7 = 63 para 90 x 70). Memorizar ciertas relaciones numéricas es sin duda un recurso útil. Sin embargo, hemos propuesto a los docentes trabajar previamente a la memorización actividades dirigidas al análisis de un conjunto de productos.

Por ejemplo, en segundo año la construcción de tablas de proporcionalidad permite empezar a poner en juego ciertas primeras relaciones numéricas[8]:

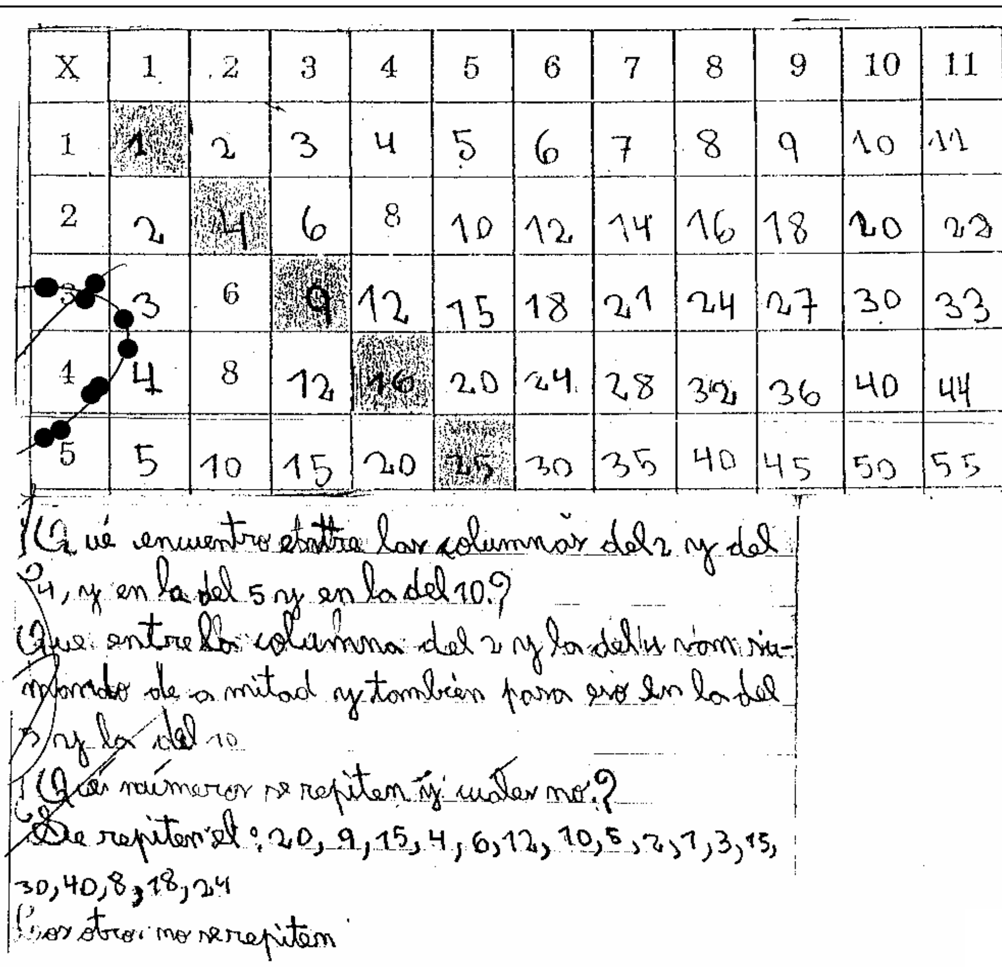
[8] Broitman, 1999

Bicicletas	Ruedas		Triciclos	Ruedas		Autos	Ruedas
1	2		1	3		1	4
2	4		2	6		2	8
3	6		3	9		3	12
4	8		4	12		4	16
5	etc.		5	etc.		5	etc.
6			6			6	
7			7			7	
8			8			8	
9			9			9	
10			10			10	

Estas tablas, una vez analizadas, pueden constituirse en un lugar con “información útil” para resolver otros problemas. Se apunta a que los niños empiecen a reconocer que para averiguar “cuántas patas tienen 5 perros” es posible fijarse en cuántas ruedas tienen 5 autos. Las relaciones numéricas allí elaboradas empiezan a ser útiles para otros problemas similares.

Para el abordaje de todos los productos de los números del 1 al 10 hemos propuesto a los docentes de tercer año - luego de retomar los cuadros de doble entrada presentados anteriormente - el trabajo con la tabla pitagórica (cuadro de doble entrada para los productos hasta 10 x 10). El completamiento puede ser realizado a partir de diferentes estrategias. Algunos alumnos descubrieron que se repiten casi todos los casilleros, 3x4 = 4x3 excepto los que son de multiplicación por sí mismos y decían que la mitad de la tabla era igual a la otra mitad (tomando la diagonal como eje de simetría). Otros alumnos encontraron que se puede ir llenando verticalmente sumando sucesivas veces el número de la columna. Muchos niños hacen en primer lugar las filas de números “más redondos” como el 2, el 4, el 5, etc. y luego completan la columna correspondiente al mismo número. Cada estrategia lleva implícita una o más propiedades de la multiplicación y de los números involucrados.

Veamos cómo en la Escuela Nº 1 de 25 de Mayo les proponen a los niños de tercer año el análisis de un sector de la tabla.



X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55

¿Qué encuentro entre las columnas del 2 y del 4, y en la del 5 y en la del 10?

Que entre las columna del 2 y la del 4 son siguiendo de a mitad y también para eso en la del 5 y la del 10

¿Qué números se repiten y cuáles no?

Se repiten el: 20, 9, 15, 4, 6, 12, 10, 5, 2, 7, 3, 15, 30, 40, 8, 18, 24

Los otros no se repiten

Y en otro tercer grado registran otras propiedades encontradas:

Conversando entre todos vimos que se pueden sumar columnas $3 \times 2 = 6$

$3 \times 3 = 9$

y $3 \times 5 = 9 + 6 = 15$

En la Escuela Nº 1 de Marcos Paz, Mónica Capurro les propone a sus alumnos también el completamiento y análisis de la tabla.

• Usamos el cuadro de doble entrada.

$6 \times 5 = 30$ $8 \times 3 = 24$

$4 \times 8 = 32$ $3 \times 8 = 24$

$3 \times 9 = 27$ $6 \times 4 = 24$

$2 \times 7 = 14$ $5 \times 5 = 35$

$5 \times 6 = 30$ $8 \times 4 = 32$

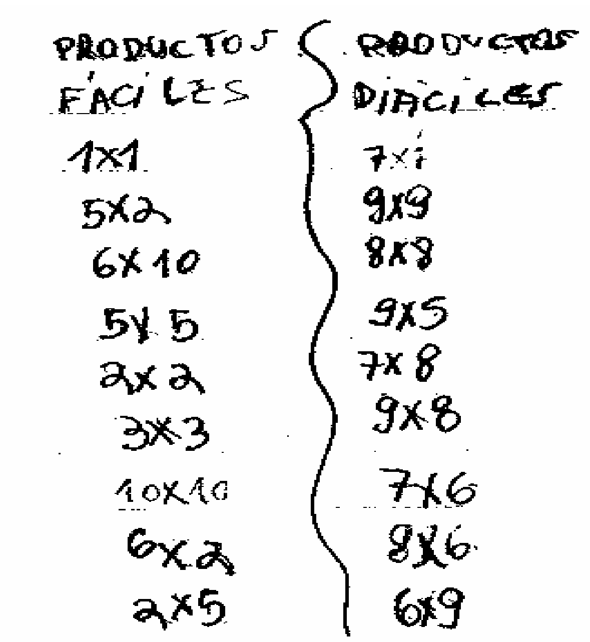
HOY DESCUBRIMOS QUE SI CAMBIAMOS EL ORDEN DE LOS NÚMEROS EN LA MULTIPLICACIÓN EL RESULTADO ES EL MISMO

En grupo trabajamos mucho...

VECES 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	14	16	18	20	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	9	18	24	32	40	48	56	63	[illegible]	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

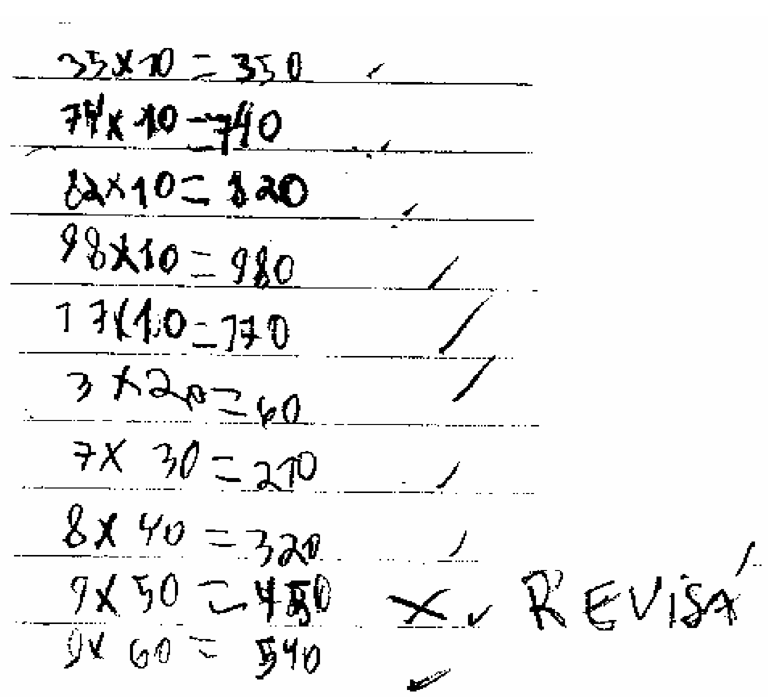
Los productos de este cuadro son objeto de análisis y de estudio durante algunas clases. Como algunas propiedades no son encontradas por los niños las docentes las propusieron para que sus alumnos analizaran si eran o no válidas. Por ejemplo: *"Unos chicos de otra escuela dijeron que si uno suma los números de la columna del 2 con la columna del 3 obtiene los resultados de la columna del 5 ¿es verdad? ¿pasará con otros números?"* o bien *"Fíjense si hay alguna columna que sea el doble, el triple o el cuádruple de otra",* etc.

Durante clases siguientes este cuadro de doble entrada se constituye en "material de consulta", los alumnos pueden utilizarlo para consultar resultados de problemas que se les presentan. Posteriormente se propone la reconstrucción de los productos utilizando las propiedades y relaciones encontradas (*"No se cuánto es 8 x 7 pero sé que es el doble que 7 x 4 o puedo hacer 8 x 5 y 8 x 2 y sumarlos")*. Recién después de este trabajo de análisis y reconstrucción hemos propuesto su memorización con actividades y juegos diversos. Por ejemplo, se pueden establecer cuáles son los productos que ya todos saben ("fáciles") y aquellos que hay que aprender ("difíciles"), como plantea la maestra de la escuela 1 Bartolomé Mitre a sus alumnos de tercer año:



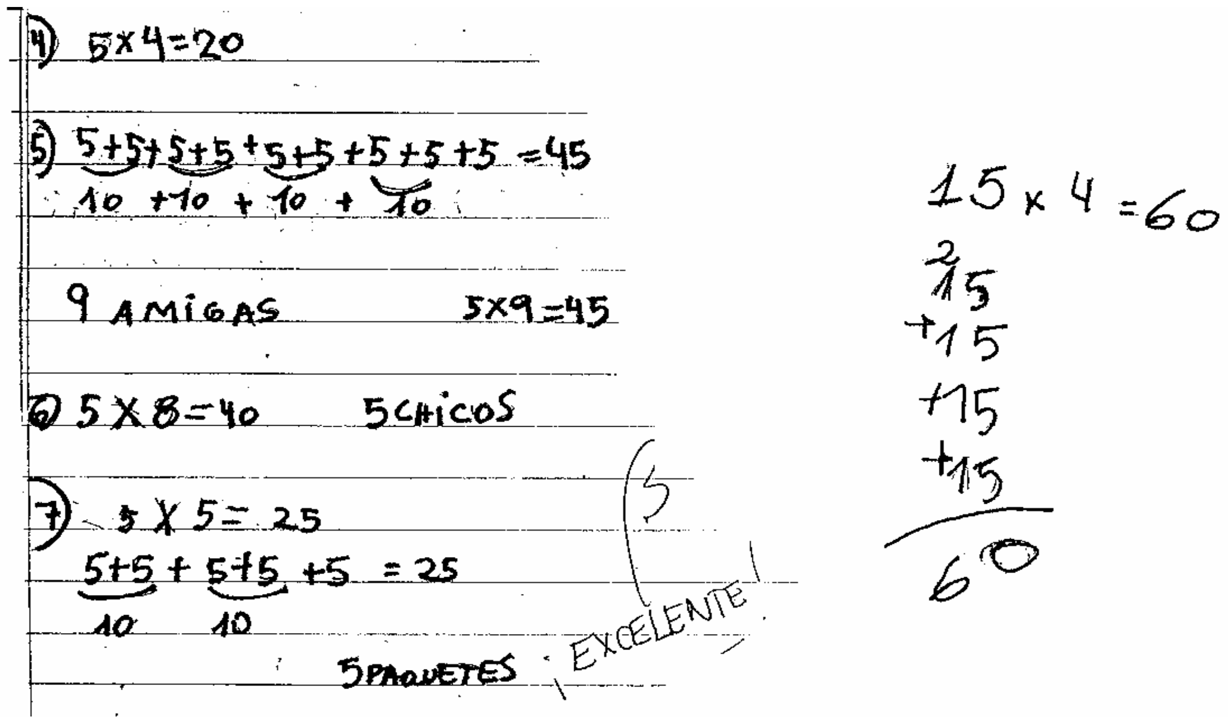
PRODUCTOS FÁCILES	PRODUCTOS DIFÍCILES
1x1	7x7
5x2	9x9
6x10	8x8
5x5	9x5
2x2	7x8
3x3	9x8
10x10	7x6
6x2	8x6
2x5	6x9

Entre los recursos memorizados de los que los niños deben disponer se encuentra la multiplicación por la unidad seguida de ceros. Para ello se podrá abordar a partir de algunos problemas cálculos de diferentes números x10, x 20, x 30, x 100, x 200, etc. Veamos también cálculos de ese mismo grado:

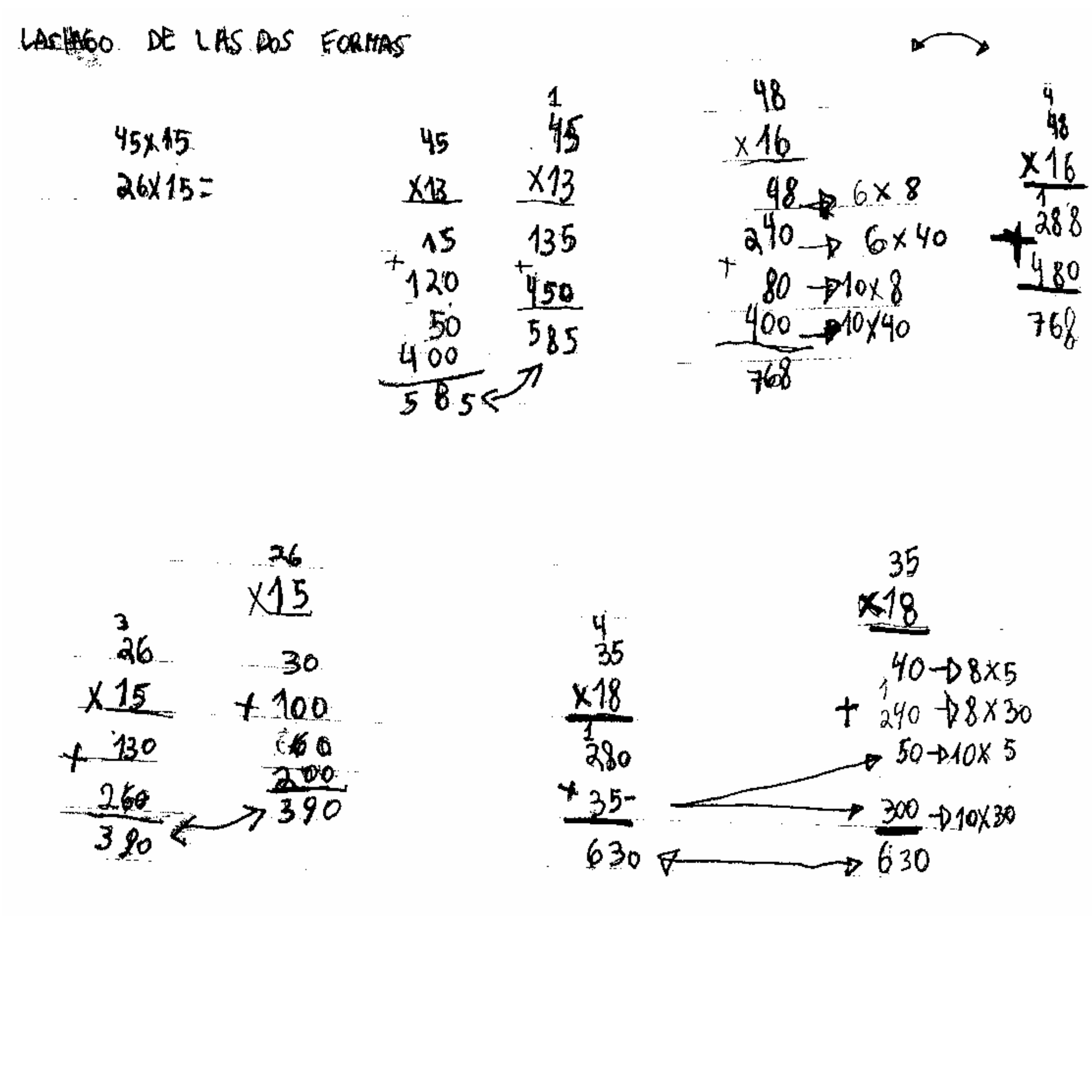


35x10 = 350
74x10 = 740
12x10 = 120
98x10 = 980
17x10 = 170
3x20 = 60
7x30 = 210
8x40 = 320
9x50 = 450 REVISA
9x60 = 540

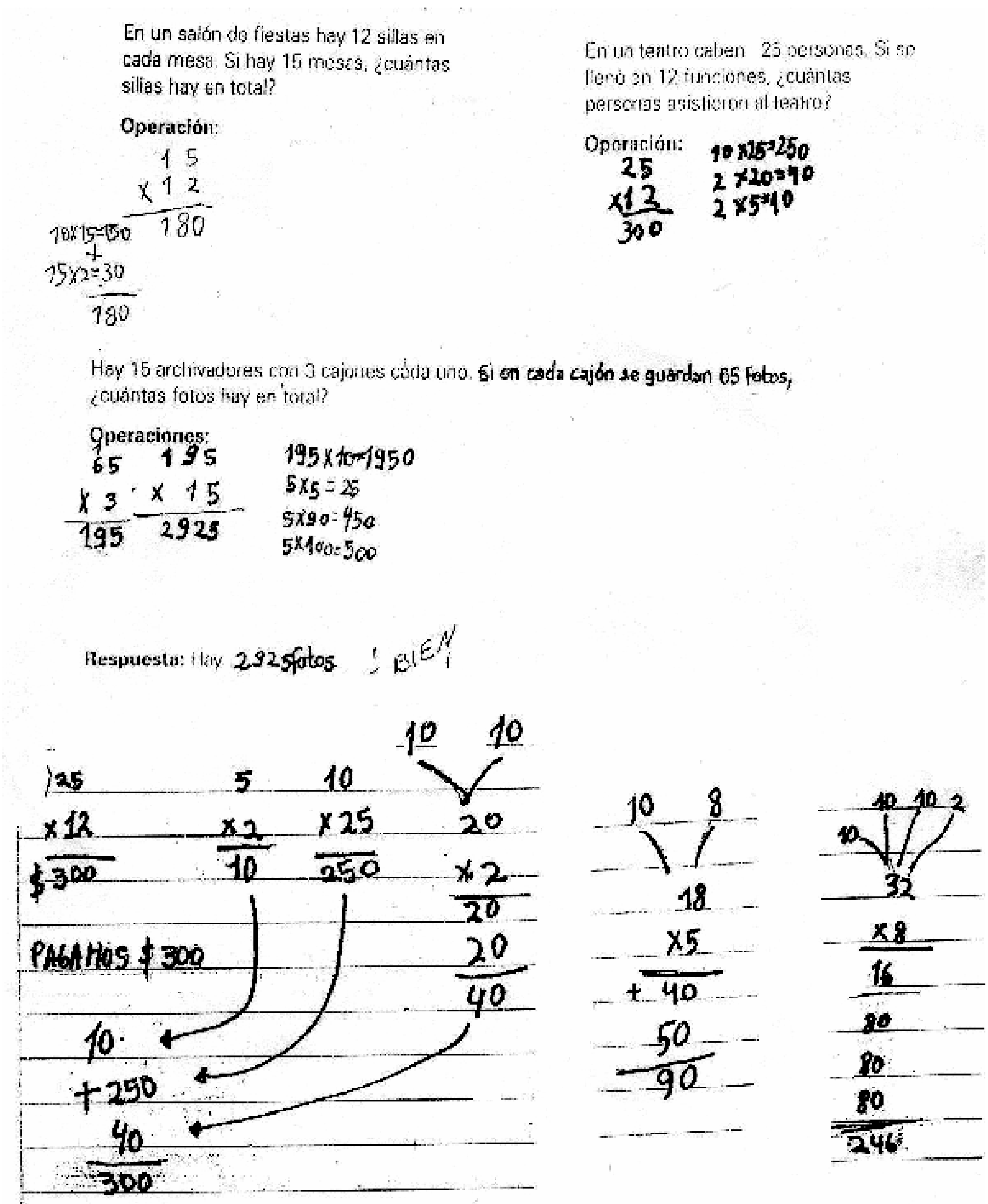
Hemos desarrollado en los encuentros la importancia de abordar la enseñanza del cálculo mental, del cálculo estimativo y del uso de la calculadora en forma previa al cálculo algorítmico. Veamos algunos cálculos que realizan los niños:



También en la Escuela Nº 1 de Marcos Paz, Mónica Capurro propone a sus alumnos diversos algoritmos que provisoriamente se usan en forma simultánea con la finalidad de que los alumnos controlen los pasos intermedios que realizan:



En otro tercer año, Ana Migiotti, maestra de la EGB Nº 4 de la localidad de N. de la Riestra propone a sus alumnos una serie de problemas que se resuelven con cálculos multiplicativos. Veamos cómo los niños realizan descomposiciones que les permiten con multiplicaciones más sencillas, resolver las multiplicaciones más complejas.


En un salón de fiestas hay 12 sillas en cada mesa. Si hay 15 mesas, ¿cuántas sillas hay en total?

Operación:

15 x 12 = 180

10x15=150 + 15x2=30 = 180

En un teatro caben 25 personas. Si se llenó en 12 funciones, ¿cuántas personas asistieron al teatro?

Operación:

25 x 12 = 300

10 x 25 = 250
2 x 20 = 40
2 x 5 = 10

Hay 15 archivadores con 3 cajones cada uno. Si en cada cajón se guardan 65 fotos, ¿cuántas fotos hay en total?

Operaciones:

65 x 3 = 195

195 x 15 = 2925

195 x 10 = 1950
5 x 5 = 25
5 x 90 = 450
5 x 100 = 500

Respuesta: Hay 2925 fotos ¡BIEN!

25 x 12 = $300

PAGAMOS $300

5 x 2 = 10
10 x 25 = 250
10 + 10 = 20
20 x 2 = 40
20 + 20 = 40

10 + 250 + 40 = 300

10 + 8 = 18
18 x 5
40 + 50 = 90

10 + 10 + 10 + 2 = 32
32 x 8
16 + 80 + 80 + 80 = 246

Los procedimientos de los niños ponen en juego intuitivamente la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma. Podrá ser enunciada aunque no se usen sus nombres convencionales (*"Vimos que hacer 8 x 7 era lo mismo que hacer primero 8 x 5 y luego 8 x 2 y sumar todo al final"*) . Recién en el segundo ciclo será necesario nombrar convencionalmente estas propiedades. Los niños podrán resolver entonces diferentes cálculos utilizando procedimientos de cálculo mental primero, luego se aproximarán a procedimientos de cálculos verticales realizando diferentes descomposiciones y analizando si obtienen o no el mismo resultado. El algoritmo convencional se presenta luego, como un procedimiento más sintético a partir de los utilizados por los niños, pero basado en la misma propiedad: se realizan diferentes multiplicaciones a partir de descomponer el número.

Una vez que los niños conocen el algoritmo de la multiplicación no "desaparece de la escena" el cálculo mental. Se continúan proponiendo ejercicios de estimación y verificación de cálculos, planteando problemas que no exijan resultados exactos, etc. Por ejemplo, Bibiana Morel, maestra de 6to año de la escuela Nº 46 de Lobería propone a sus alumnos los siguientes cálculos:

Calculo mental

1) Resolver y analizar

35 x 20 = 700 (+700)
35 x 40 = 1400 (+700)
35 x 60 = 2100 (+700)
35 x 80 = 2800

1° procedimiento

Nosotros hacemos 35 x 2 y le agregamos el cero del 20

2° procedimiento

al resultado de 35 x 20 = 700 le sumamos 700

Ej.: 35 x 20 = 700 (+700)
1400 (+700)
2100 (+700)
2800

2) Elegir el resultado correcto sin hacer las cuentas

A) 505 x 52 = 1620; 56260; 26260

B) 98 x 37 = 30626; 3626; 6626

Multiplicamos 5 x 5 que son los últimos números multiplicados en esa cuenta y nos da 25 centenas buscamos el número que tenga unidad y decena de mil como número cerca es: 26

3) Calcula mentalmente (explica)

36.20 = 720

800.40 = 32 000

36 x 20 = Primero multiplicamos 36 x 2 y al resultado lo multiplicamos por 10.

720

800 x 40 = Primero multiplicamos 800 x 4 y al resultado lo multiplicamos por 10

800 32000

En el segundo ciclo se pretende que los alumnos puedan disponer de variados procedimientos y técnicas de cálculo y elegir el más pertinente en función de los problemas. Se espera también que los alumnos adquieran herramientas que les permitan controlar procesos y resultados. Para ello propusimos un fuerte trabajo de cálculo aproximado, de cálculo mental, y de uso de calculadora[9].

En segundo ciclo, a partir de las estrategias de cálculo mental es posible abordar la explicitación de las propiedades utilizadas. Por ejemplo, situaciones que exijan argumentar acerca de la validez de ciertas expresiones:

Colocar Verdadero o Falso y justificar :
36: 6 : 2= 36 : (6:2)
240 : 12= 240 : 10 :2
35 x 16 = 35 x 4 x 4

El estudio de las propiedades de la multiplicación permitirá a los alumnos desplegar una gran variedad de estrategias de cálculo. Por ejemplo, a partir de la utilización de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y la resta poder pensar en 25 x 19 como :

- 25 x 10 + 25 x 9
- 25 x 10 + 25 x 5 + 25 x 4
- 25 x 20 – 25 x 1
- etc.

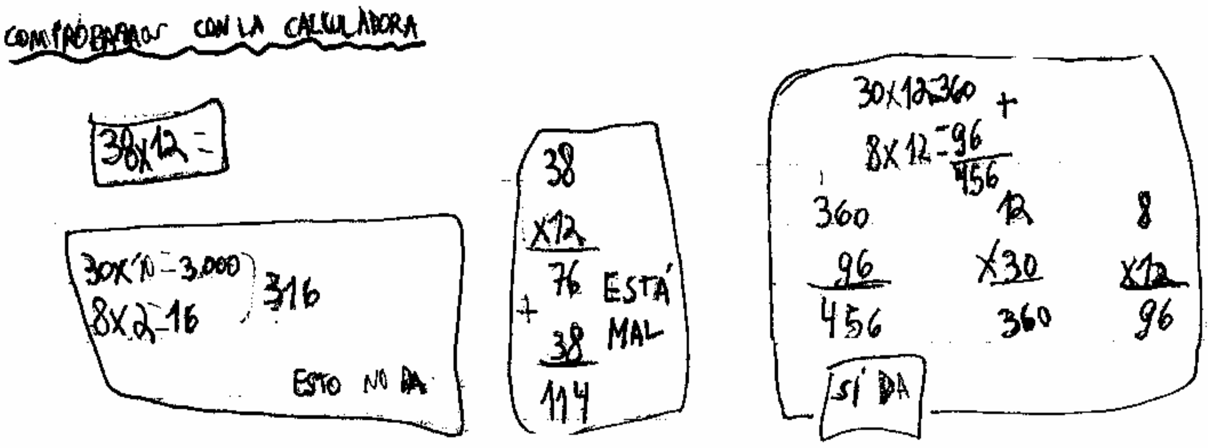
y a partir de la utilización de las propiedades conmutativa y asociativa poder considerar 25 x 20 como equivalente a :

- 5 x 5 x 20
- 5 x 5 x 5 x 4
- 2 x 25 x 10
- etc.

La calculadora es una herramienta hoy imprescindible en las aulas. Entre sus usos resaltamos la posibilidad de que los alumnos resuelvan una gran variedad de problemas en los cuales los cálculos no son el objetivo de la clase, especialmente con aquellos problemas que tienen varios pasos y en los que la actividad central del alumno es tomar decisiones acerca de qué cálculos hacer. También es interesante como control de las anticipaciones, por ejemplo, frente a una colección de cálculos en los que hay que realizar estimaciones, utilizar la calculadora para corroborar:

25 x 138: como 25 x 100 es 2500 es mayor que 2500,
15 x 197: como 15 x 200 es 3000 es un poco menor que 3000

Abordamos también en los encuentros un conjunto de problemas de cálculo para resolver con la calculadora que exigen utilizar las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva. Por ejemplo, este trabajo de un alumno de tercer grado en el que se comprueba la validez o no de ciertas descomposiciones para multiplicar dos números:



[9] Para ampliar estos aspectos consultar el Documento Nº 4 del GCBA y Parra, 1994.

Otros problemas con la calculadora que permiten trabajar las propiedades son por ejemplo los siguientes: *"¿Cómo hacer 25 x 20 en la calculadora si no funciona la tecla del 0?"* O bien: "*¿Cómo hacer 6 x 5 x 7 x 9 x 10 utilizando una sola vez la tecla x?",* etc.

El análisis sobre la utilización de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma en estos cálculos permite comprender la innecesariedad de "dejar el lugar" cuando multiplican por dos cifras o la arbitrariedad de iniciar el cálculo por las unidades. Por ejemplo son cálculos equivalentes y válidos:

```
  450
 x 14
 1800   (4 x 450)
 4500    (10 x 450)
 6300

  450
 x 14
 4500    (10 x 450)
 1800   (4 x 450)
 6300
```

Ambos algoritmos podrán "convivir" en la clase. Será interesante que los alumnos conozcan que usualmente - al menos desde hace unos siglos, en algunos países, y por ahora - se inicia el cálculo por las unidades, o que se "deja un lugar" en el producto de las decenas, aunque ambas cuestiones no sean únicas ni necesarias. Apuntamos a que nuestros niños dominen las razones que subyacen a los cálculos que utilizan y que sepan también que han existido y sobreviven diferentes formas de calcular según los tiempos y las culturas.

Hemos desplegado parte del trabajo realizado en las aulas dirigido a enriquecer la gama de problemas que involucra el estudio de la multiplicación. En este apartado hemos tratado de comunicar la variedad de estrategias de cálculo que la misma operación también abarca.

5) La multiplicación como objeto de estudio en EGB 3.

Hasta aquí se ha desplegado una variedad de problemas y recursos de cálculo que involucra el tratamiento de la multiplicación en primero y segundo ciclos de la EGB. Cabe preguntarse entonces, ¿qué aspectos relativos a la multiplicación le competen al tercer ciclo?

Problemas de combinatoria

Intentando avanzar sobre el trabajo realizado en segundo ciclo, es posible presentar a los alumnos de este tercer ciclo problemas de combinatoria, que permitan profundizar el análisis desplegado en años anteriores. En estos problemas, el objetivo central es poder determinar la cantidad de elementos de una colección finita, garantizando "contar todos" y "no contar ninguno dos veces". Por ejemplo:

Ejemplo 1:

a. *¿Cuántos números de 4 cifras diferentes pueden formarse con los dígitos 1,2,3, 4 y 5?*
b. *¿Cuántos números de 4 cifras pueden formarse con los dígitos 1,2,3,4 y 5?*

Con este tipo de situaciones se busca que los alumnos encuentren estrategias que permitan contar los elementos de una colección, entre ellas organizar toda la información de modo tal de garantizar la exhaustividad del conteo. En este punto, el diagrama de árbol es una representación adaptada a estos problemas y permite identificar la estructura multiplicativa de los mismos. No se apunta a la utilización de las fórmulas de combinatoria.

Por otro lado, es importante presentar a los alumnos problemas en los cuales los datos sean similares, pero los resultados del conteo no. Esto permite analizar semejanzas y diferencias entre aquellas situaciones en las que interesa el orden y aquellas en las que no. Analizar en conjunto estos problemas contribuirá a establecer sus diferencias. En séptimo año, se trabajarán estos problemas con cantidades tales que permitan el conteo caso por caso. En octavo serán retomados con cantidades mayores de manera tal de plantear la necesidad del uso de las operaciones.

Pero no solo se trata de profundizar en este ciclo en el trabajo vinculado al tratamiento de problemas de combinatoria. Veamos también otros nuevos aspectos de la multiplicación para estos años.

La multiplicación como objeto de estudio en sí misma

Así como se han presentado relaciones posibles de ser establecidas por los alumnos a partir de la división ($a = b \times q + r$; con $0 \leq r < b$)[10]; creemos que es pertinente que en el tercer ciclo los alumnos se enfrenten a situaciones que permitan identificar nuevos aspectos relevantes de la relación $a \times b = c$, donde a, b y c son números naturales. El objetivo **no es** hacer hincapié en los problemas específicos de cálculo ligados a los algoritmos, ni en su carácter de herramienta para resolver una amplia gama de situaciones - ambos aspectos trabajados en el segundo ciclo - , sino concebir a la multiplicación entre números naturales como objeto de reflexión en sí mismo. Esto implicará plantear la resolución de problemas que exijan un análisis de las relaciones entre los distintos elementos que forman parte esta operación. Por otro lado, considerando la familiaridad que los alumnos tienen con los números naturales, este tipo de trabajo constituye un buen punto de apoyo para abordar el tratamiento de lo general, cuestión característica de este ciclo.

¿A qué nuevas relaciones nos estamos refiriendo?. Veamos algunos ejemplos que ponen de manifiesto lo que queremos decir.

Ejemplo 1[11]:
Sabiendo que 28 x 16 = 448, determinar, sin hacer la cuenta, los resultados de los siguientes cálculos:
28 x 4;   448 : 7; 14 x 16 ; 448 : 12;

Este problema tiene varias finalidades. Por un lado exige a los alumnos leer información al interior de una expresión aritmética, reconociendo la “presencia” de los distintos factores que pueden conformar cada uno de los números. Pero a su vez, para poder resolverlo, es preciso concebir a la división como inversa de la multiplicación y poder explicitar aquellas descomposiciones que permiten encontrar los resultados de los cálculos propuestos.

No es esperable, que desde un comienzo, los alumnos apelen a estas relaciones que promueve el problema. En principio, los alumnos desplegarán recursos más vinculados a la exploración que dará lugar a ensayos y conjeturas. Será parte de la tarea del docente, promover la explicitación por parte de los alumnos de las diferentes maneras de reconocer el cálculo dado en el cálculo propuesto y poder, de esta forma, utilizar la información que propone el problema. Será también pertinente alentar a los alumnos a explicitar las razones en las que se apoyan para proponer el resultado, sin que ello signifique esperar justificaciones formales cuyo sentido no puede comprenderse a esta altura de la escolaridad. El objetivo es que los alumnos puedan usar el conocimiento como medio de anticipación y validación, práctica que atraviesa la propuesta para todo el ciclo. En este ejemplo se trabaja sobre un caso particular y, a medida que se avance, se irán proponiendo problemas más generales, como ser los siguientes:

Ejemplo 2:
Un patio rectangular tiene 15 filas y en cada fila 12 baldosas. ¿Será cierto que si se duplican la cantidad de baldosas del largo y del ancho, se duplica la cantidad total de baldosas?

Para resolver este problema, los alumnos, en general, apelan a diferentes estrategias. Algunos optan por realizar el dibujo del patio, duplicar la cantidad de baldosas de las filas y columnas en el dibujo, y concluir que no se duplica la cantidad total de baldosas.

Otros alumnos operan con las cantidades. Realizan el cálculo 15 x 12 obteniendo 180. Posteriormente buscan los dobles de ambas cantidades y vuelven a operar: 30 x 24 = 720, concluyendo que no se duplica la cantidad de baldosas. De todos estos alumnos, sólo algunos van un poco “más allá” de lo que pide el problema: intentan establecer una relación entre 180 y 720, reconociendo que, no solo no se duplica la cantidad de baldosas, sino que se cuadruplica. Esta relación entre “el doble de baldosas en cada lado y la nueva cantidad de baldosas” es el punto central del problema. Pero analicemos ahora los dos primeros modos de resolverlo. Quienes realizan el dibujo, constatan empíricamente que no se duplica la cantidad de baldosas, igual que los que hacen las cuentas (el resultado no es el doble). Pero en ninguno de los dos casos pueden explicar el motivo (matemático) por el cual se cuadruplica la cantidad de baldosas. Con el dibujo, “se ve” que son cuatro veces más, pero, desde el punto de vista de quien hace el dibujo, podría tratarse de un hecho contingente: el resultado es este, pero nada

[10] Ver Documento Nº 2: Orientaciones didácticas para la enseñanza de la división. D.E.P. Prov. de Bs. As. Año 2001
[11] Los cuatro problemas que se analizan en este apartado fueron tomados del Documento para séptimo grado. Matemática. Dirección de Currícula. G.C.B.A., 2001

indica que no podría haber sido otro. Lo mismo podríamos decir de quienes resuelven el problema apelando a las cuentas: dio cuatro veces más, pero podría haber sido otro.

El gran desafío consiste en promover con los alumnos un análisis de la operación y sus propiedades, de modo de que puedan empezar a anticipar que el resultado va a ser cuatro veces más, aunque no hagan todas las cuentas y no se apoyen en un dibujo. Es decir que se intenta que los alumnos puedan dar cuenta matemáticamente de los motivos por los cuales el resultado debe ser cuatro veces más. Éste es más explícitamente el objetivo del siguiente problema:

Ejemplo 3:

El producto entre dos números es 480. ¿Es posible encontrar el resultado de multiplicar el doble del primero por el doble del segundo? En caso de ser posible, encontrar dicho resultado. En caso de no ser posible, explicar por qué.

Este problema, para los alumnos, resulta más complejo, ya que no están determinados los números que intervienen en la multiplicación. En consecuencia, muchos suponen valores que respondan a las características del enunciado, por ejemplo, 120 x 4 = 480 y, a partir de allí, duplican cada factor y responden que *"es cuatro veces más".* Es en este punto donde las intervenciones de los docentes pueden permitir un avance en los análisis de los alumnos. Por ejemplo, al proponer escribir en el pizarrón algunos de los diferentes ejemplos de productos encontrados por los alumnos que den 480, habilita a una reflexión tendiente a identificar que "no importan" los pares de números elegidos, siempre, el resultado del doble del primero por el doble del segundo, da cuatro veces el resultado original, o sea 1920. Recién allí se presentan condiciones un tanto más favorables para solicitar a los alumnos una escritura que represente tal situación, apostando a que aparezcan o circulen diferentes notaciones que den cuenta de esta nueva relación. Por ejemplo: a x b = 480 luego a x 2 x b x 2 = 1920, o bien, 4 x a x b = 1920, escrituras que permiten identificar los motivos por los cuales se obtiene el cuádruple.

Este mismo tipo de tratamiento es pertinente continuarlo con problemas como el siguiente:

Ejemplo 4:

El producto entre dos números es 6358. ¿Será posible conocer el resultado de multiplicar el doble del primero por el triple del segundo?

El objetivo central de estos últimos tres ejemplos es que los alumnos identifiquen las diferentes variaciones que sufre un producto, a medida que varían los factores del mismo, relaciones que implican una nueva conceptualización en cuanto a la multiplicación de números naturales.

También es posible, con los alumnos de los octavos años de las EGB, abordar algunas relaciones vinculadas al tratamiento de la multiplicación, pero ampliando el campo numérico al conjunto de enteros. En este caso, se presenta una nueva dificultad: la relación entre los signos de los factores y el resultado de la multiplicación. Veamos el siguiente ejemplo

Ejemplo 5:

Encontrar cinco pares de números que multiplicados den -12.

Los alumnos, al enfrentarse a este problema, ya conocen varias relaciones que comandan la multiplicación entre números naturales, pero se encontrarán con la problemática de la multiplicación de un número negativo por otro número positivo, o de dos números negativos.

Algunos alumnos se apoyan en uno de los modos en los cuales se ha tratado la multiplicación en primero y segundo ciclos de EGB, por ejemplo recordando que 4 x 3 se define como la suma 3 + 3 + 3 + 3 = 12 y entonces propongan 4 y (-3) como uno de los pares posibles puesto que 4 x (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12. Es importante alentar este uso natural de la multiplicación, en este caso sin necesidad de explicitar que se trata de una extensión de la multiplicación ya definida en N.

Otro par posible es – 4 y 3, planteándose en este caso la cuenta (- 4) x 3 que puede ser tratada de manera similar al caso anterior.

Y el par -3, -4, ¿es una respuesta posible? Hemos visto a alumnos proponer razonamientos de este tipo: *" (-3) x (-4) es 12 porque si fuera - 12 sería lo mismo que (-3) x 4 y entonces sería -4 = 4"*

Creemos que es posible aceptar este tipo de razonamientos en este nivel de la escolaridad. Como el docente sabe, se trata en realidad de una extensión implícita de la propiedad cancelativa, válida en el conjunto de los naturales, a un nuevo conjunto; nos parece que no se trata, en esta instancia, de abrir esta problemática con los alumnos.

Hay otros argumentos que el docente puede utilizar para dar sentido a la multiplicación de dos negativos. Por ejemplo, podría plantear que una propiedad muy importante en el conjunto de los números naturales es la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la resta. Queremos que esta propiedad siga valiendo en Z, es decir que podamos usarla para los números negativos. Por lo tanto, sabiendo que $(-3) \times 0 = 0$, debe verificarse entonces que también $(-3) \times (4 + (-4)) = 0$.

Por la propiedad distributiva (que queremos que siga valiendo en Z) se cumple

$$(-3) \times (4 + (-4)) = (-3) \times 4 + (-3) \times (-4) = 0$$

Y como $(-3) \times 4 = -12$, el resultado de $(-3) \times (-4)$ es 12.

Es posible que algún alumno "conozca" las reglas de la multiplicación entre enteros y las enuncie: "un negativo por un negativo da positivo" o "más por menos es menos", etc. En dicho caso el docente podrá instalar el debate en torno a la fundamentación de las reglas intentando hacer circular algunas de las justificaciones anteriores.

Intentando profundizar el análisis del producto entre enteros, se podrá proponer a los alumnos un problema como el siguiente:

Ejemplo 6:
Encontrar un número entero de manera tal que al multiplicar dicho número por (-7) el resultado sea positivo. ¿Hay más de uno?

No se pretende, con este tipo de problemas, que los alumnos los resuelvan mediante el planteo de inecuaciones, sino que permita un análisis de diferentes posibilidades sustentado en las características de las operaciones involucradas, en este caso, la relación entre el signo de cada uno de los números que intervienen en un producto y el signo del resultado. Por otra parte, se espera que los alumnos comprendan que cuando se habla de un entero, por ejemplo a, éste puede ser mayor o menor que cero, de la misma forma que si se hablara del entero -b.

6) Una propuesta de distribución de contenidos por año

Hemos intentado mostrar a lo largo de este documento el trabajo realizado con un conjunto de docentes de diferentes escuelas y regiones de la Provincia en torno a la enseñanza de la multiplicación y plantear algunas orientaciones didácticas que permitan ampliar el trabajo alrededor de esta operación en la escolaridad obligatoria. La complejidad de este contenido es tal que debe abarcar los tres ciclos de la escolaridad, sin embargo cada ciclo debe plantear nuevos aspectos o la ampliación de los ya conocidos. Con el fin de distinguir los diferentes aspectos que pueden ser abordados sistemáticamente en cada uno de los ciclos, proponemos a continuación un ensayo de distribución tomando como fuentes el Diseño Curricular de la Provincia de Bs. As. y considerando como complemento, los Pre Diseños Curriculares de la Ciudad de Bs. As. No tiene carácter prescriptivo, sino que pretende ser un aporte para el debate en cada escuela.

Contenidos sobre la multiplicación en el Primer ciclo

- Resolución de problemas que involucran series proporcionales y organizaciones rectangulares mediante diferentes procedimientos: dibujos, conteo, sumas reiteradas, etc. Explicitación y comparación de las estrategias utilizadas (1º y 2º año).
- Resolución de problemas correspondientes a diferentes significados de la multiplicación (series proporcionales, organizaciones rectangulares, combinatoria) por medio de variados procedimientos inicialmente y luego por medio de escrituras multiplicativas (2º y 3º año).
- Interpretación de los significados y usos de la multiplicación con números naturales, elaborando e implementando estrategias de cálculo en forma exacta y aproximada, produciendo y resolviendo situaciones problemáticas (2º y 3º año).

- Estimación e interpretación de resultados de cálculos en forma mental, por escrito y con uso de calculadora, comprobando su razonabilidad y justificando los procedimientos empleados (2º y 3º año).
- Investigación de regularidades y propiedades de una colección de productos organizados en tablas y cuadros con la finalidad de ser reutilizados en otros problemas y posteriormente memorizados (3º año)
- Dominio progresivo de variados recursos de cálculo que permitan realizar multiplicaciones. Utilización de resultados numéricos conocidos (multiplicación x la unidad seguida de ceros y productos de la tabla pitagórica) y de las propiedades de los números y las operaciones (diferentes descomposiciones) para resolver otros cálculos (3º año)
- Elaboración de distintas estrategias de cálculo aproximado para resolver problemas en los cuales no sea necesario un cálculo exacto (3º año).
- Investigación y reconstrucción del algoritmo de la multiplicación a partir de los recursos elaborados por los alumnos para realizar cálculos mentales (3º año).

Contenidos sobre la multiplicación en el Segundo ciclo

- Resolución de problemas que involucran organizaciones rectangulares utilizando la multiplicación (4º y 5º años).
- Resolución de problemas de proporcionalidad por medio de diversos procedimientos, estudio de sus diferentes propiedades y análisis de los límites de la misma (4º y 5º años)
- Resolución de problemas de proporcionalidad que involucren el análisis de tablas, cuadros, gráficos, etc. (5º y 6º años).
- Resolución de problemas de combinatoria inicialmente por medio de gráficos, listas, cuadros, diagramas de árbol, sumas, etc. y luego por medio de multiplicaciones (4º, 5º y 6º años)
- Comprensión del significado y aplicación de la multiplicación con números naturales (4º, 5º y 6º años)
- Elaboración de distintas estrategias de cálculo exacto y aproximado, de cálculo algorítmico, mental y con calculadora (4º, 5º y 6º años).
- Estimación del resultado de multiplicaciones apoyándose en propiedades de los números y de las operaciones (4º, 5º y 6º años).
- Construcción de variados algoritmos para multiplicar con factores de diversa cantidad de cifras a partir del estudio de las propiedades involucradas (4º y 5º años) .
- Utilización de la calculadora para resolver situaciones problemáticas multiplicativas de varios pasos, para controlar multiplicaciones realizadas por otros procedimientos y para verificar relaciones anticipadas entre números y operaciones (4º, 5º y 6º años)

Contenidos sobre la multiplicación en el Tercer ciclo

- Estimación, interpretación y comunicación de los cálculos, comprobando su razonabilidad, valorando la precisión en la expresión de los mismos y justificando los procedimientos empleados.
- Producir y analizar primeras escrituras de las soluciones que admite la relación en términos algebraicos
- Fortalecer el sentido de la multiplicación como objeto matemático.
- Avanzar en la reflexión sobre la variación del producto a partir de la variación de sus factores.
- Anticipación de resultados esperados a partir de la puesta en funcionamiento de las propiedades de la multiplicación.

Bibliografía

- Barallobres, G.; Itzcovich, H; Sadovsky, P ; Sessa, C (2001) : Documento para séptimo grado. Dirección de Currícula. G.C.B.A.
- Broitman, C. (1999): Las operaciones en el primer ciclo. Aportes para el trabajo en el aula. Ediciones Novedades Educativas. Bs. As.
- Broitman, C. (2000): "El tratamiento didáctico de los problemas multiplicativos desde los primeros años de la escolaridad básica". En Revista de Educación Projeto Nº 3. Brasil.
- Brousseau, G (1994) Problemas en la Enseñanza de los decimales. Problemas de didáctica de los decimales. Publicación de IMAF, Universidad Nacional de Córdoba.
- Brousseau, G. : Representaciones y Didáctica del significado de la división. Actas Del Coloquio de Sevres, (ficha mimeografiada). 1997
- Brousseau,G (1980): Problemas en la Enseñanza de los Decimales., Traducción de Dilma Fregona. UNC, 1994
- Carraher, T.; Carraher, D. ; y Schliemann, A. (1991): En la vida diez, en la escuela cero. México, Siglo XXI
- Charnay, R (1994): "Aprender por medio de la resolución de problemas". En: Didáctica de Matemáticas, Parra, C y Saiz,I.(Comp),Editorial Paidós.
- Diseño Curricular Provincia de Bs. As. Tomo I y Tomo II (1999 y 2001).
- Documento Nº 1 /97. Gabinete Pedagógico Curricular – Matemática- D.E.P. Prov. Bs. As.
- Documento Nº 1 /99. Gabinete Pedagógico Curricular – Matemática- D.E.P. Prov. Bs. As.
- Documento Nº 2/01. Gabinete Pedagógico Curricular – Matemática- D.E.P. Prov. Bs. As.
- Ferreiro, E. (1986): El cálculo escolar y el cálculo con dinero en situación inflacionaria" , en: Proceso de alfabetización. La alfabetización en proceso. Bs. As. CEAL
- Lerner, D. (1996) "La enseñanza y el aprendizaje escolar" en Castorina, Ferreiro, Lerner, Oliveira: Piaget- Vigotsky: contribuciones para plantear el debate. Bs. As. Paidós.
- Lerner, D. : "La Matemática en la escuela" Buenos Aires, Ed Aique. 1992
- Lerner, D. y Sadovsky, P.: "El sistema de numeración: un problema didáctico" En Parra, c y Saiz, I, Didáctica de la Matemática. Paidós, 1994
- Panizza, M. y Sadovsky, P. (1992): El papel del problema en la construcción de conocimientos matemáticos. El caso de la proporcionalidad. FLACSO
- Parra, C. (1994): "El cálculo mental en la escuela Primaria", en Parra y Saiz, Didáctica de Matemática. Paidós.
- Sadovsky, Parra, Itzcovich, Broitman (1997): Documento de Actualización Didáctica nº4. Matemática. Segundo Ciclo de la EGB, MCBA
- Sadovsky,P. Parra,C.; Itzcovich, H ; Broitman,C.(1999): Pre Diseño EGB. Marco Gral, Primer Ciclo y Segundo Ciclo. Dirección de Currículum. Secretaría de Educación. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.
- Saiz, I. "Dividir con dificultad o la dificultad de dividir" en Parra y Saiz, op. cit.
- Vergnaud, G. (1997): Aprendizajes y Didácticas: ¿Qué hay de Nuevo? Bs.As. Ed Edicial,1997.
- Vergnaud, G. (l976): El niño, las matemáticas y la realidad, problema de las matemáticas en la escuela, Ed Trillas, Méjico