Medir la incertidumbre

Introducción al estudio de la Probabilidad

M. Laura Dodino | Mag. en Educación. Profesora de Matemáticas. Formadora de maestros en Enseñanza de la Matemática.

Este trabajo tiene principalmente la finalidad de presentar, a los docentes del Sistema de Educación Primaria, una introducción al estudio de la Probabilidad. En próximos trabajos continuaremos desarrollando algunos aspectos básicos del tratamiento matemático y presentaremos ideas para el trabajo, a nivel escolar, de los contenidos matemáticos vinculados al tratamiento del azar y la probabilidad.

La Probabilidad es una disciplina científica que nació asociada a los juegos de azar y a las apuestas[1]. Hoy en día tiene aplicaciones que han excedido en mucho las más clásicas, como es el caso de la Estadística Inferencial. Es utilizada en Biología, Ciencias Sociales, en Física, etc.

La noción de probabilidad nace de la necesidad de medir de alguna manera la certeza de que un evento o suceso ocurra o no. Para hacerlo, se define una función de probabilidad que asigna un número a un suceso.

La teoría de la probabilidad se ocupa de definir con precisión el concepto de probabilidad de eventos, y de desarrollar métodos para calcular la probabilidad de algunos eventos, conocidas las probabilidades de otros.

Algunos de los matemáticos que están asociados al desarrollo de la probabilidad son: **G. Cardano** (que vivió entre 1501-1576; 87 años después de su muerte se publica su *Libro sobre los juegos de azar*); **B. Pascal** (1623-1662); **J. Bernoulli** (en los comienzos de 1700); **Th. Bayes**; **P. S. Laplace** (con su libro *Teoría analítica de las probabilidades*, en 1812), **A. Kolmogorov** (en la primera mitad del siglo XX fundamentó matemáticamente la Teoría de la Probabilidad).

En nuestro país existe una escuela vinculada a la Teoría de la Probabilidad y a la Estadística, que cuenta con matemáticos reconocidos internacionalmente. Las dos instituciones de referencia en esta materia son el IMERL de la Facultad de Ingeniería (UdelaR) (http://www.fing.edu.uy/) y el Centro de Matemática de la Facultad de Ciencias (UdelaR) (http://www.cmat.edu.uy/).

Todo experimento debe ser susceptible de repetirse conservando las mismas condiciones con las cuales se realizó su precedente, de tal manera que las inferencias que se realicen resulten lo más fiables posible. Aun así, no siempre se obtienen los mismos resultados, pues a veces participan factores incontrolables que no obedecen a ninguna causa natural controlada ni intervención humana intencionada, y que denominamos ***azar*** o casualidad.

Desde el punto de vista de la presencia o no de la *contingencia* en los resultados, definimos experimentos:

Determinístico es aquel en el cual, bajo las mismas condiciones experimentales, absolutamente todas las repeticiones del experimento producen siempre el mismo resultado.

Aleatorio es aquel en el que, aun conservando las mismas condiciones experimentales controladas, los resultados no se pueden predecir con exactitud para las sucesivas repeticiones.

[1] Uno de los problemas referidos a juegos de azar que motivó a un gran matemático francés, Blas Pascal, alrededor de 1650, fue el siguiente: El Caballero De Meré plantea a Pascal que en su experiencia práctica como jugador había comprobado que era favorable apostar uno a uno a favor de que al tirar cuatro veces un dado común saldría al menos un seis, y en cambio era desfavorable apostar en las mismas condiciones a favor de sacar por lo menos un seis doble tirando dos dados 24 veces.

Ejemplo 1: Lanzamos una moneda al aire para observar de cuál lado cae, no podemos pronosticar con certeza si se presentará número o si se presentará cara. Tenemos presente el componente del azar y es, por consiguiente, un experimento aleatorio. No ocurriría lo mismo si la moneda estuviese diseñada igual por ambos lados y, por consiguiente, sería un experimento determinístico.

Ejemplo 2: Se repite un experimento, y sus resultados se miden con un instrumental de poca precisión, obteniendo un experimento **determinístico**. Luego se mejora la precisión de los instrumentos de medición, de modo que son capaces de captar las pequeñas variaciones de los resultados. Al repetir el experimento varias veces, se detecta que se trata de un experimento **aleatorio**. En este caso, el carácter de aleatorio del experimento resulta de una mejora en la calidad del conocimiento sobre el fenómeno.

Definición de probabilidad

Los eventos aleatorios no son predecibles con absoluta certeza; no obstante podemos medir el grado de confianza con que se hace un pronóstico sobre la ocurrencia o no de un determinado suceso. Para ello se pueden usar tres interpretaciones de la probabilidad.

1. Probabilidad clásica o "a priori" (o de sucesos equiprobables)

Si un evento puede ocurrir de *n* maneras, equiprobables y mutuamente excluyentes, de las cuales *m* maneras son favorables al suceso *A*, se define probabilidad del suceso *A* como el cociente *m*/*n*.

Ejemplo: En el lanzamiento de un dado de seis caras numeradas del 1 al 6, la probabilidad de sacar un número primo (2 o 3 o 5) es 1/2 (3/6).

2. Probabilidad "a posteriori" o de frecuencia relativa (se tiene en cuenta la historia)

Si un experimento se repite *n* veces, de las cuales *m* veces se presenta el suceso *A,* entonces si *n* es "suficientemente grande", se estima la probabilidad del suceso A como *m*/*n*.

La Teoría de la Probabilidad se ocupa de determinar condiciones suficientes para que la proporción de veces que se presenta el suceso *A* tienda a estabilizarse en un número entre 0 y 1, llamado probabilidad de *A*.

Si, por ejemplo, lanzamos un dado cien veces y observamos que la presencia del número "5" es de 16 veces, estimamos la probabilidad de sacar un 5 en 16/100.

Estas dos interpretaciones se basan en la posibilidad de repetir el experimento aleatorio bajo las mismas condiciones.

3. Probabilidad subjetiva o personal

Muchos fenómenos no se prestan para la repetición y, sin embargo, es necesario considerar su probabilidad, por ejemplo, para asignar una póliza de seguro a una obra de arte frente al riesgo de robos o daños.

En la probabilidad subjetiva intervienen preferencias y emociones del analista que, en general, son diferentes. Esta interpretación representa una medida del grado de creencia con respecto a un suceso. Ejemplos:

- Un apostador puede preferir el número "3" porque su horóscopo se lo recomienda o porque es el día de San Cono. En este caso, su estimación puede diferir de la de frecuencia relativa, con graves consecuencias para su bolsillo.
- La probabilidad de sobrevivir luego de una operación quirúrgica la estima un médico, basando su juicio en lo que ha sido su historia profesional.

Esta interpretación de la probabilidad es considerada por algunos como la más general.

Algunos términos básicos asociados a la probabilidad

Fenómenos aleatorios: son aquellos para los que no puede darse una respuesta exacta sobre cuál será su resultado antes de que se produzca.

Espacio muestral: es el conjunto de todos los resultados posibles del fenómeno.

Diremos que un fenómeno es un **experimento aleatorio** cuando se cumplen las siguientes condiciones:

- El experimento se puede repetir indefinidamente bajo las mismas condiciones controladas, pudiéndose obtener resultados distintos en cada una de las pruebas realizadas (debido a las condiciones no controladas).
- El resultado de cada prueba pertenece al espacio muestral.

- Se trata de un fenómeno aleatorio, es decir, antes de realizar una prueba del experimento no se puede predecir el resultado que se obtendrá.
- La frecuencia relativa de cada resultado tiende experimentalmente a aproximarse a un valor fijo, es decir, aparece un modelo de regularidad estadística.

El modelo matemático general para los fenómenos aleatorios requiere siempre un espacio muestral. El espacio muestral puede ser discreto o continuo[2] según que el conjunto de casos posibles sea numerable[3] o no. La descripción de este conjunto es el primer paso en la construcción del modelo matemático de un fenómeno aleatorio.

Los eventos o sucesos son cualquier subconjunto de resultados posibles a los que se les va a atribuir una probabilidad (entre los cuales debe incluirse el espacio muestral y el conjunto vacío).

- Se dice que ha ocurrido un evento o suceso E si el resultado del experimento es un elemento de E.
- Cuando un suceso contiene un solo elemento del espacio muestral diremos que se llama **suceso elemental o simple** y llamaremos **suceso compuesto** a aquellos formados por dos o más elementos del espacio muestral.
  Ejemplo: es un suceso elemental que salga cara al tirar una moneda, y es un suceso compuesto el que salga impar al tirar un dado común pues está conformado por los sucesos elementales: 1, 3 y 5.

Si el espacio muestral es discreto, se suele atribuir una probabilidad a cada suceso elemental. Esto no es, en general, posible para los espacios muestrales continuos.

La función de probabilidad[4] es la que atribuye una probabilidad a cada evento. Es una medida no negativa, aditiva en familias numerables de eventos disjuntos, tal que la medida del espacio muestral es igual a uno. Ejemplos:

Sea X_1 el experimento aleatorio *"tirar un dado común y observar el número de su cara superior"*.

Su espacio muestral correspondiente es $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. En este caso puede contarse la cantidad de resultados posibles del experimento, por lo tanto estamos frente a un espacio muestral discreto.

Sea X_2 el experimento aleatorio *"observar la distancia que salta un atleta en salto largo"*.

Podemos considerar razonable que un atleta no supere los 20 metros, por ejemplo; entonces su espacio muestral es cualquier número real entre 0 y 20 (que representa la distancia que salta el atleta, expresada en metros).

$\Omega = [0,20]$ Este conjunto no es numerable; por lo tanto, el espacio muestral es continuo.

Para el experimento X_1 un suceso E es que salga en la cara superior un número par. E, por lo tanto, es el subconjunto de Ω, formado por los resultados 2, 4 y 6.

$E = \{2,4,6\}$.

Si realizamos una prueba y en la cara superior del dado aparece el 4 diremos que ha ocurrido E o se ha producido E.

Para el experimento X_2 un suceso E es que el atleta salta por lo menos 12 metros. E, por lo tanto, es el subconjunto de Ω, formado por los reales comprendidos entre 12 y 20.

$E = [12,20]$.

Si se realiza una prueba y el atleta salta 14,7 metros, diremos que ha ocurrido E o se ha producido E.

Los sucesos pueden definirse por comprensión, es decir, a través de una condición necesaria y suficiente para que un elemento del espacio muestral pertenezca al suceso. Muchas de estas condiciones no son verificadas por ningún elemento del espacio muestral, definiendo entonces el conjunto vacío al que llamaremos suceso imposible.

Ejemplo: que *"salga un 7"* al tirar el dado del experimento X_1. Para este caso vemos que no existe ningún elemento del espacio muestral de dicho experimento que pueda hacerlo cierto. En este caso, el suceso es el conjunto vacío.

*Llamaremos **suceso imposible** a cualquier suceso que es igual al conjunto vacío.*

Algunas condiciones son cumplidas por todos los elementos del espacio muestral, definiendo al conjunto Ω.

[2] Por ejemplo, el espacio muestral puede consistir en un intervalo de números reales.
[3] Es decir, es posible ponerlos en correspondencia inyectiva con los números naturales.
[4] Desarrollaremos estas nociones más adelante en este trabajo.

Ejemplo: para el mismo experimento que *"salga un número menor a 7"*. Dicho suceso está formado por todos los elementos del espacio muestral y puesto que uno de esos sucesos simples debe producirse cuando tiremos el dado, siempre será cierto que sale un número menor a 7.

*Llamaremos **suceso seguro** a aquel suceso que es igual al espacio muestral.*

Algunas condiciones son cumplidas por al menos uno de los elementos del espacio muestral, pero no por todos.

Si un suceso no es imposible o seguro, entonces es *incierto*, digamos que hay incertidumbre sobre la ocurrencia del suceso y hasta que no se realice el experimento no podremos decir si se verificará o no.

Es para estos casos que surge la necesidad de contar con una teoría de la probabilidad que dé cuenta cuantitativamente del grado de incertidumbre de un suceso.

Un suceso es posible si no es imposible. Esta categoría incluye a los sucesos inciertos y al suceso seguro.

También definiremos:

Sucesos complementarios: diremos que dos sucesos A y B son complementarios con respecto al espacio muestral Ω si la unión de ambos forma Ω, y si A y B no tienen elementos en común.

Ejemplo: Para el caso del experimento X_1 los sucesos A: "que salga par" y B: "que salga impar" son complementarios; siempre que realicemos X_1 se verificará A o B, pues juntos forman el espacio muestral de X_1 y además nunca pueden ocurrir simultáneamente.

Ejemplo: Para el experimento X_1 el suceso complementario de {1,2} es {3,4,5,6}.

Sucesos mutuamente excluyentes: cuando dos sucesos cualesquiera no tengan elementos en común diremos que son mutuamente excluyentes.

Los sucesos mutuamente excluyentes no pueden ocurrir simultáneamente; la ocurrencia de uno excluye la ocurrencia del otro. Usando las operaciones entre conjuntos, la intersección de ambos sucesos es el conjunto vacío.

Ejemplos:

- Los sucesos complementarios son mutuamente excluyentes.
- Para X_1 el suceso {2} y el suceso {3,4,5} son mutuamente excluyentes.

Por la definición que dimos de suceso, el "lenguaje de los sucesos" es el "lenguaje de los conjuntos". Es posible, entonces, establecer las relaciones de inclusión y de igualdad así como las operaciones de unión, intersección y diferencia de conjuntos para aplicarlas a los sucesos.

La familia de conjuntos a los que se les asigna una probabilidad

Hemos establecido que un suceso es un subconjunto del espacio muestral de un fenómeno aleatorio al que se le atribuye una probabilidad.

Si consideramos un espacio muestral Ω finito podemos atribuir probabilidades a los sucesos elementales y, además, usando las operaciones entre conjuntos, antes mencionadas, podemos atribuir probabilidades a cualquier subconjunto del espacio muestral.

Tomemos el experimento X_3 que consiste en tirar un dado de forma tetraédrica regular, cuyas caras están numeradas del 1 al 4, su espacio muestral, por lo tanto, es Ω = {1,2,3,4}.

Obtengamos, entonces, todos los sucesos posibles asociados a Ω; para ello usaremos, como criterio de organización, la cantidad de elementos que tiene cada suceso, comenzando por 0 cantidad de elementos hasta el máximo que es 4 elementos.

Cantidad de elementos	Sucesos posibles asociados al experimento X_1	Comentarios
0	{} = ∅	El conjunto vacío
1	{1} {2} {3} {4}	Los sucesos elementales
2	{1,2} {1,3} {1,4} {2,3} {2,4} {3,4}	Por ejemplo, el suceso {2,4} se forma por la unión de los sucesos elementales {2} y {4}
3	{1,2,3} {1,2,4} {1,3,4} {2,3,4}	{1,2,4} se forma por la unión de {2,4} y del suceso {1}
4	{1,2,3,4}	El espacio muestral Ω

Hemos obtenido 16 subconjuntos a partir del espacio muestral Ω; estos son, entonces, todos los sucesos a considerar asociados al experimento X_3.

Al conjunto $\{A_i : i \in I\}$ formado por todos los sucesos posibles asociados a un experimento aleatorio[5] y a los que atribuiremos una probabilidad (en este caso, los 16 subconjuntos del cuadro anterior) lo llamaremos σ-álgebra (sigma-álgebra) y lo notaremos con *A*.

El conjunto *A* tiene las siguientes propiedades:

1. el conjunto vacío es un elemento de *A*;
2. si un suceso pertenece al conjunto *A*, su complementario también pertenece a *A*;
3. si una cantidad numerable de sucesos pertenece a *A*, la unión de los mismos también pertenece al conjunto *A*.

¿Cómo asignar una medida a la incertidumbre de un suceso?

Sigamos trabajando con el experimento X_3, que correspondía a tirar un dado de forma tetraédica regular con caras numeradas del 1 al 4 y observar qué cara quedaba apoyada en la mesa.

Su espacio muestral Ω es {1,2,3,4}, llamaremos:
A_1 al suceso salió el 4 ($A_1 = \{4\}$);
A_2 al suceso salió impar ($A_2 = \{1,3\}$);
A_3 al suceso salió un número menor a 9 ($A_3 = \{1,2,3,4\}$);
A_4 al suceso salió un 6 ($A_4 = \{\} = \varnothing$).

Un suceso imposible como el A_4 tiene probabilidad cero, un suceso seguro como el A_3 tiene probabilidad 1, y todos los otros casos, como son ejemplos el A_1 y el A_2, tienen una probabilidad que es un número del intervalo [0,1].

Tipo de suceso	Imposible	Otros sucesos	Seguro
Elemento de la familia de sucesos A	∅	{1} {2} {3} {4} {1,2} {1,3} {1,4} {2,3} {2,4} {3,4} {1,2,3} {1,2,4} {1,3,4} {2,3,4}	Ω
Probabilidad p asignada	0	$0 \leq p(A_i) \leq 1$	1

Para los casos anteriores notaremos su asignación de probabilidad así:

$$p(A_4) = 0 \qquad p(A_3) = 1 \qquad 0 \leq p(A_1) \leq 1$$

donde leeremos, por ejemplo, "la probabilidad de que ocurra A_4 es cero".

Consideremos a continuación cómo puede definirse la probabilidad para los sucesos que son inciertos (ni imposibles ni seguros).

Partamos de un caso particular, el experimento de tirar un dado común; a partir de nuestra intuición podemos anticipar que si el dado fuera perfecto desde el punto de vista físico, cada una de las caras tiene igual probabilidad de salir cuando se efectúa un lanzamiento y, por lo tanto, lo natural sería asignar la probabilidad 1/6 a cada uno de los sucesos elementales de Ω = {1,2,3,4,5,6} de modo que la suma de las probabilidades de los sucesos elementales sea 1.

Por ejemplo, *la probabilidad de que salga el 2 es 1/6*: $p(\{2\}) = 1/6$

Y si consideramos el suceso *"salió par"* se tiene

$$p(\{2,4,6\}) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6$$

pues consideramos que ha ocurrido nuestro suceso, tanto si sale el 2, como si salen el 4 o el 6. Formalmente, la fórmula anterior es una consecuencia de la aditividad de la función de probabilidad.

Bibliografía consultada

CANAVOS, George (1988): *Probabilidad y estadística. Aplicaciones y métodos*. México: McGraw-Hill.

GNEDENKO, B. V.; KHINTCHINE, A. Ia. (1964): *Teoría de las probabilidades (Introducción)*. Barcelona: Montaner y Simón, S.A.

MORDECKI, Ernesto (2007): "Probabilidad". Trabajo preparado pensando en el Programa de Matemática de 2º año de Bachillerato del Núcleo Común - Reformulación 2006. Montevideo: Centro de Matemática, Facultad de Ciencias, UdelaR. En línea: http://www.cmat.edu.uy/~mordecki/7_probabilidad.pdf (página visitada el 29 de diciembre de 2008).

TURNER, J. C. (1979): *Matemática moderna aplicada. Probabilidades, estadística e investigación operativa*. Madrid: Ed. Alianza Universidad.

[5] Estamos considerando para este trabajo los espacios muestrales discretos, en los cuales la sigma-álgebra natural es la familia de todos los subconjuntos del espacio muestral (familia de partes de omega).