

# **ANÁLISIS DE UN OSCILADOR NO LINEAL**

**Álvaro Suárez**

**Fernando Tornaría**

**Proyecto Final del Curso de Profundización en Física Experimental**

**(Departamento de Física - Centro de Formación en Educación - ANEP, Uruguay, 2011-2012)**

# ÍNDICE

<a href="#">Introducción .....</a>	<a href="#">2</a>
<a href="#">Resumen de la investigación.....</a>	<a href="#">3</a>
<a href="#">Desarrollo experimental .....</a>	<a href="#">3</a>
<a href="#">Predicciones .....</a>	<a href="#">9</a>
<a href="#">Resultados experimentales.....</a>	<a href="#">13</a>
<a href="#">Proyecciones, nuevos caminos para explorar .....</a>	<a href="#">14</a>
<a href="#">Algunas reflexiones sobre nuestro trabajo.....</a>	<a href="#">15</a>
<a href="#">Bibliografía .....</a>	<a href="#">16</a>
<a href="#">Anexo 1: Registro del movimiento del sistema a partir de la filmación.....</a>	<a href="#">17</a>
<a href="#">Anexo 2: Estudio de la disipación de la energía del sistema .....</a>	<a href="#">18</a>

## INTRODUCCIÓN

Nuestro primer objetivo fue realizar un trabajo experimental del cual no hubiera antecedentes conocidos. Esto generó la necesidad de crear un diseño experimental y reformularlo frente a los obstáculos que se presentaron. De esta forma propiciamos las condiciones necesarias para la realización de un trabajo de investigación en física. Consideramos pertinente que el proyecto final tuviera un enfoque de este tipo para aplicar las tendencias actuales de la didáctica de la física.

Las críticas respecto a los enfoques tradicionales de las actividades experimentales señalan que, además de no ser adecuadas pedagógicamente, su fundamentación epistemológica es equivocada. Su concepción empirista-inductivista de la ciencia asume que el conocimiento científico es la verdad probada o descubierta que tiene origen en la acumulación de observaciones cuidadosas de algún fenómeno por una mente libre de preconceptos y sentimientos que aplica el “*método científico*” para llegar a generalizaciones científicamente válidas. Esta concepción de ciencia termina atribuyéndole un peso excesivo a la observación, en detrimento de las ideas previas y de la imaginación de los estudiantes. Además, representa el método científico como un algoritmo infalible, capaz de producir conocimiento científicamente probado, comenzando con observaciones objetivas y neutras, formulación de hipótesis, comprobación experimental y generalización de las conclusiones. Existen dos problemas serios con esa visión. En primer lugar, esa concepción del proceso de producción de conocimiento sugiere que las actividades prácticas en educación media son de la misma naturaleza y tienen la misma finalidad que las actividades experimentales que hacen los científicos. En segundo lugar, esta imagen de ciencia está completamente superada en los círculos académicos hace varias décadas.<sup>1</sup>

Las investigaciones actuales acerca de la didáctica de la ciencia proponen un cambio en el tratamiento del trabajo práctico que lo haga más coherente con la propia epistemología de la ciencia y con la visión constructivista del aprendizaje. El trabajo práctico tradicional promueve un reducido número de procedimientos científicos, limitados exclusivamente al desarrollo de la manipulación, observación y comprobación de la teoría, omitiéndose aspectos como la contextualización teórica, la proposición de hipótesis/ensayos, el análisis de datos y la obtención de conclusiones.<sup>2</sup> Una alternativa consiste en estructurar las actividades de laboratorio como investigaciones o problemas prácticos más abiertos, que los estudiantes deben resolver sin la dirección impuesta por una guía fuertemente estructurada. En una investigación abierta, al estudiante le cabe toda la solución, desde la percepción y generación del problema; su formulación en forma susceptible de investigación; la planificación del curso de sus acciones; la selección de los equipamientos y materiales, la preparación del montaje experimental, la realización de medidas y observaciones; el registro de los datos; la interpretación de los resultados y la enumeración de las conclusiones. De esta forma se propician actividades relevantes y motivadoras para los estudiantes, que los desafíen a utilizar sus habilidades cognitivas para construir modelos más robustos, capaces de dar sentido a sus experiencias.

---

<sup>1</sup> Tarciso Borges, *Novos rumos para o laboratório escolar de ciencias*. En *Cad. Brasileiro de Ensino de Física*, 19, 3, 291-313, 2002.

<sup>2</sup> García Barros et al. *El trabajo práctico. Una intervención en para la formación de profesores*. En *Enseñanza de las Ciencias*, 1995, 13 (2), 203-209.

## RESUMEN DE LA INVESTIGACIÓN

Este proyecto consiste en analizar cinemática, dinámica y energéticamente las oscilaciones de un sistema que presenta un comportamiento no lineal. El sistema estudiado consta de un resorte del cual cuelga una pesa con imanes, los cuales son atraídos por un segundo grupo de imanes. A partir del estudio de las fuerzas que actúan sobre el dispositivo se determinó la ecuación de movimiento del sistema. Esta última resultó ser una ecuación diferencial no lineal. Para obtener un modelo que permita predecir la posición del sistema en función del tiempo se resolvió numéricamente la ecuación del movimiento. A partir de la filmación del sistema se obtuvieron valores experimentales de la posición en función del tiempo. El ajuste de estos datos a las predicciones del modelo fue ampliamente satisfactorio.

## DESARROLLO EXPERIMENTAL

La figura 1 muestra el montaje experimental.



*Figura 1.* Montaje experimental. Una pesa cuelga de un resorte cuyo extremo superior está fijo. En la base de la pesa hay cinco imanes de neodimio cilíndricos, bajo los cuales se encuentra un disco de metal. Tanto la pesa como el disco son de aleaciones ferromagnéticas y pueden oscilar solidarios al resorte. Debajo de este sistema se encuentra fijo un segundo disco (similar al anterior) en cuya base hay dos imanes de neodimio con forma de barra.

Para estudiar el movimiento de la pesa oscilando se registró el mismo con una cámara de video que registra 30 cuadros por segundo. La filmación obtenida fue analizada con el programa "Tracker". Mediante este programa se determinó la posición de la pesa en función del tiempo.<sup>3</sup> De acuerdo con el teorema de Nyquist, la frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble de la mayor frecuencia que se quiere reconstruir.<sup>4</sup> Como la frecuencia con que oscila el sistema es del orden de  $1\text{Hz}$ , nuestra frecuencia de muestreo ( $30\text{Hz}$ ) es adecuada.

<sup>3</sup> Ver Anexo 1.

<sup>4</sup> Alvarado y Stern. *Un complemento al teorema de Nyquist*. Rev. Mex. Fis. E 56 (2) (2010) p. 167.

## ESTUDIO DE LA FUERZA ELÁSTICA Y DEL AMORTIGUAMIENTO

Para determinar las características de la fuerza restauradora y del rozamiento viscoso se realizó un montaje similar al de la figura 1 pero sin los imanes de barra. De acuerdo con nuestras hipótesis iniciales, en estas condiciones las únicas fuerzas que actúan sobre la pesa son la ejercida por el resorte, el peso y la fricción del aire. Suponiendo que el rozamiento depende linealmente de la velocidad, la ecuación del movimiento del sistema es:<sup>5</sup>

$$\ddot{x} + \frac{b}{M} \dot{x} + \frac{k}{M} x = 0 \quad (1)$$

Donde  $b$  es el coeficiente de amortiguamiento,  $k$  la constante del resorte y  $m$  la masa de la pesa.

La ley horaria correspondiente a la ecuación 1 es:<sup>6</sup>

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \text{sen}(\omega t + \delta) \quad (2)$$

Donde:

$$\beta = \frac{b}{2M} \quad (3)$$

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{k}{M}\right)^2 - \beta^2} \quad (4)$$

En la gráfica de la figura 2 se puede observar el excelente ajuste de los datos experimentales a la ecuación 2 con los siguientes parámetros<sup>7</sup>:

$$A = (1,365 \pm 0,001) \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\beta = (5,73 \pm 0,01) \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

$$\omega = (6,264 \pm 0,01) \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

$$\delta = 1,4758 \pm 0,0001$$

<sup>5</sup> Estableciendo como origen del eje  $x$  la posición de equilibrio de la pesa.

<sup>6</sup> De acuerdo a las observaciones experimentales el tipo de amortiguamiento del sistema estudiado sólo se puede corresponder a un subamortiguado.

<sup>7</sup> RMSE =  $1,626 \times 10^{-4}$  m. (Todos los valores fueron determinados con la función "curvefit" del programa "Logger Pro".)

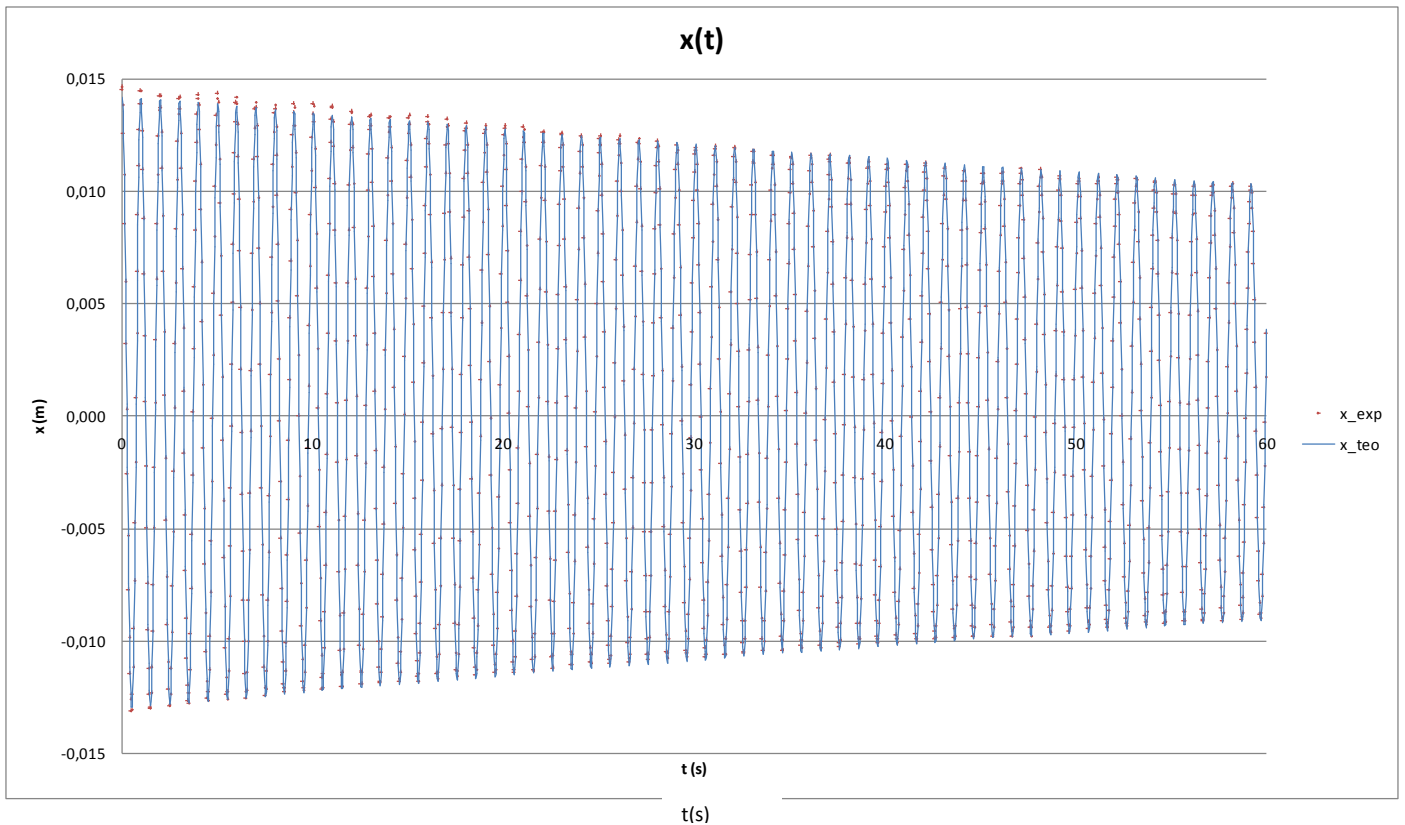


Figura 2. Gráfica de la posición en función del tiempo.

De la ecuación 4 se desprende que el valor de la constante elástica del resorte es:

$$k = M\sqrt{\omega^2 + \beta^2} \quad (5)$$

La ecuación anterior se deduce a partir de la suposición de que la masa del resorte es nula. Si bien en nuestro sistema la masa de la pesa es mucho mayor que la del resorte, esta última no es despreciable. La ecuación 6 es una mejor aproximación del valor de la constante elástica ( $K$ ).

$$K = \left( M + \frac{m_{\text{resorte}}}{3} \right) \sqrt{\omega^2 + \beta^2} \quad (6)$$

Sea  $z(t)$  la posición del extremo inferior del resorte en el instante  $t$  (ver figura 3).<sup>8</sup>

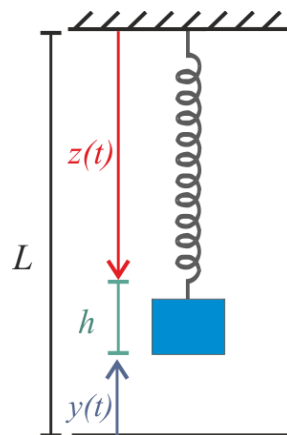


Figura 3.

<sup>8</sup> Estableciendo el extremo superior del resorte como origen del eje  $z$ .

### Expresión de la fuerza elástica:

La fuerza elástica está dada por la siguiente ecuación:

$$F_E(t) = -K(z(t) - l_0) \quad (7)$$

Donde  $l_0$  es la longitud natural del resorte y  $K$  la constante elástica del resorte:

$$l_0 = (7,1 \pm 0,2) \times 10^{-2} \text{ m}$$
$$K = (10,74 \pm 0,03) \text{ N/m}$$

### Expresión de la fuerza de rozamiento:

La fuerza de rozamiento está dada por la siguiente ecuación:

$$F_R(t) = -b \cdot \dot{z}(t) \quad (8)$$

Donde  $b$  es el coeficiente de amortiguamiento. De la ecuación 3 se desprende que:

$$b = 2M\beta \quad (9)$$

$$b = (3,06 \pm 0,06) \times 10^{-3} \text{ kg/s}$$

## ESTUDIO DE LA FUERZA MAGNÉTICA

Para determinar la fuerza magnética que actúa sobre la pesa en función de su posición, empleamos el montaje de la figura 4.



*Figura 4.* Los imanes de barra fueron colocados sobre una balanza digital (con la cual se determinó el valor de la fuerza magnética) y la pesa colgada de un hilo. Con una regla dispuesta verticalmente se midió la distancia entre la pesa y los imanes de barra. Se modificó gradualmente dicha distancia, registrando la fuerza correspondiente a cada una de las posiciones en que fue ubicada la pesa. (La exposición de la balanza a campos magnéticos muy intensos podría llegar a alterar las medidas, por lo que para aumentar la distancia entre los imanes de barra y el plato de la balanza se colocó entre ambos un recipiente de poliestireno expandido.)

La gráfica de la figura 5 muestra los resultados experimentales de la fuerza magnética actuante sobre la pesa ( $F_B$ ) en función de la distancia a los imanes de barra ( $y$ ).

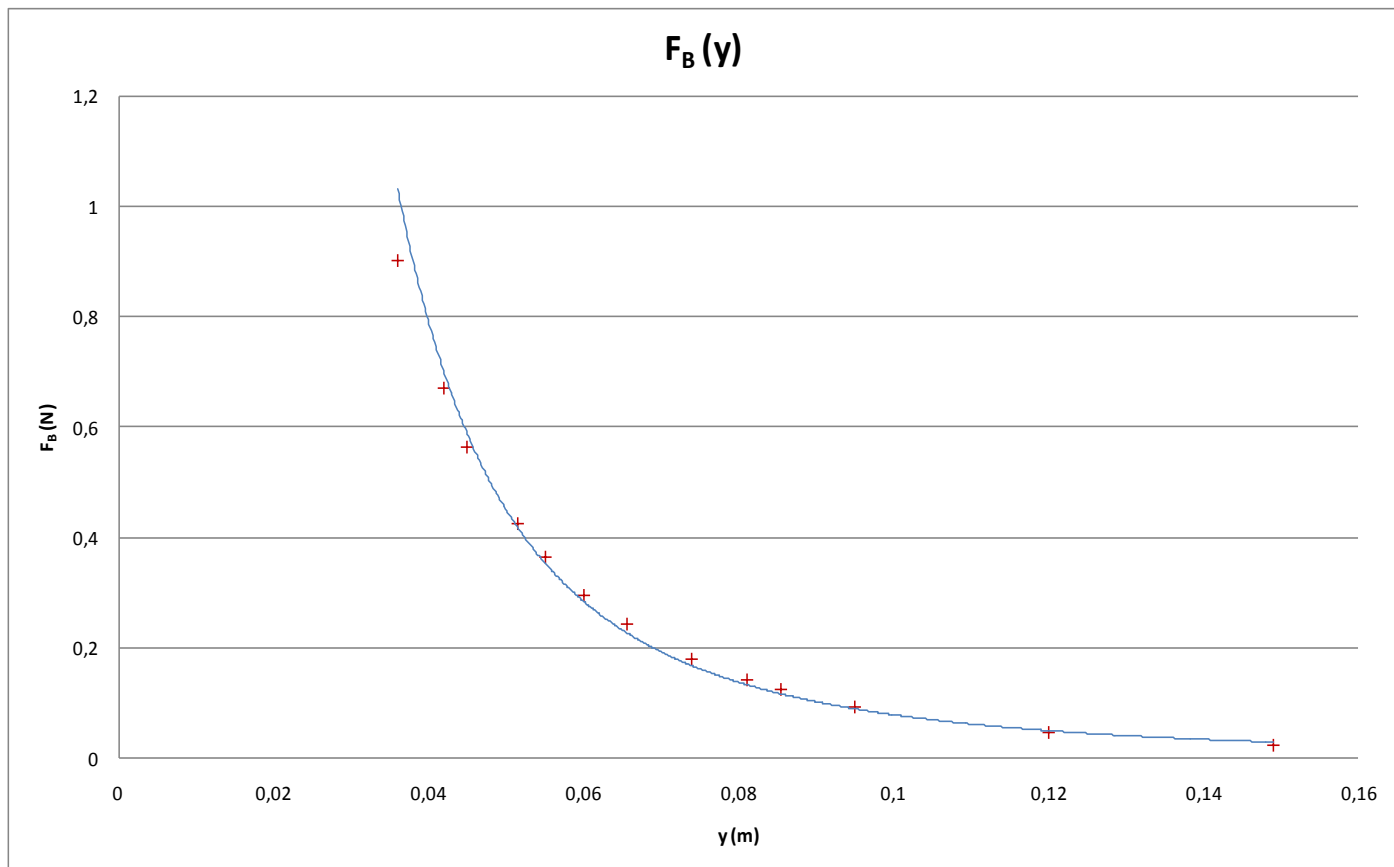


Figura 5

Se observó que los valores experimentales se ajustan satisfactoriamente a una función potencial:

$$F(y) = C y^n \quad (10)$$

con los siguientes parámetros:<sup>9</sup>

$$C = 2,304 \times 10^{-4}$$

$$n = -2,529$$

Como se puede apreciar en la Figura 3,  $y(t)$  puede expresarse en función de  $z(t)$ :

$$y(t) = L - h - z(t) \quad (11)$$

Tras realizar este cambio de variable en la ecuación 10, la expresión de la fuerza magnética queda dada por:

$$F_B(t) = C(L - h - z(t))^n \quad (12)$$

<sup>9</sup> Estos valores están expresados en unidades del S.I. y fueron determinados utilizando el programa "Excel."



## ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO DEL SISTEMA

Para modelar el comportamiento del sistema se partió inicialmente de las siguientes hipótesis:

- El resorte tiene un comportamiento lineal y su masa –aunque no es despreciable- es mucho menor que la de la pesa.
- La fuerza de rozamiento depende linealmente de la velocidad de la pesa.
- No son significativos otros factores de disipación de energía<sup>10</sup>, como por ejemplo:
  - Las corrientes eléctricas inducidas.
  - La radiación de ondas electromagnéticas.
- La totalidad de la energía cinética de la pesa siempre es de traslación.
- La fuerza magnética que actúa sobre la pesa depende únicamente de su posición.
- La trayectoria de la pesa es vertical.

La fuerza neta que actúa sobre la pesa es:

$$\vec{F}_{neta}(t) = \vec{F}_B(t) + \vec{F}_E(t) + \vec{F}_R(t) + M\vec{g} \quad (13)$$

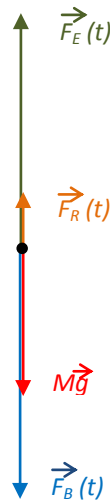


Figura 6. Diagrama de las fuerzas actuantes sobre la pesa en un instante  $t$ .

De acuerdo con las ecuaciones 7, 8, 12 y 13:

$$F_{neta}(t) = C(L - h - z(t))^n - k(z(t) - l_0) - b\dot{z}(t) + Mg \quad (14)$$

Aplicando la 2ª Ley de Newton se arriba a la ecuación del movimiento:

$$\ddot{z}(t) = \frac{C(L - h - z(t))^n - k(z(t) - l_0) - b\dot{z}(t)}{M} + g \quad (15)$$

<sup>10</sup> Ver Anexo 2.

## PREDICCIONES

### 1. Análisis de la posición y de la aceleración en función del tiempo a partir de la solución numérica de la ecuación de movimiento.

A partir de la modelización teórica del sistema, encontramos que la ecuación de movimiento que describe el sistema no es lineal. Dicha ecuación *no posee solución analítica*. La aceleración en función del tiempo y la ley horaria del sistema, las obtuvimos numéricamente utilizando el Método de Euler.<sup>11</sup>

Dados los parámetros del sistema y las condiciones iniciales del experimento, obtuvimos los gráficos *teóricos* de las figuras 7 y 8.

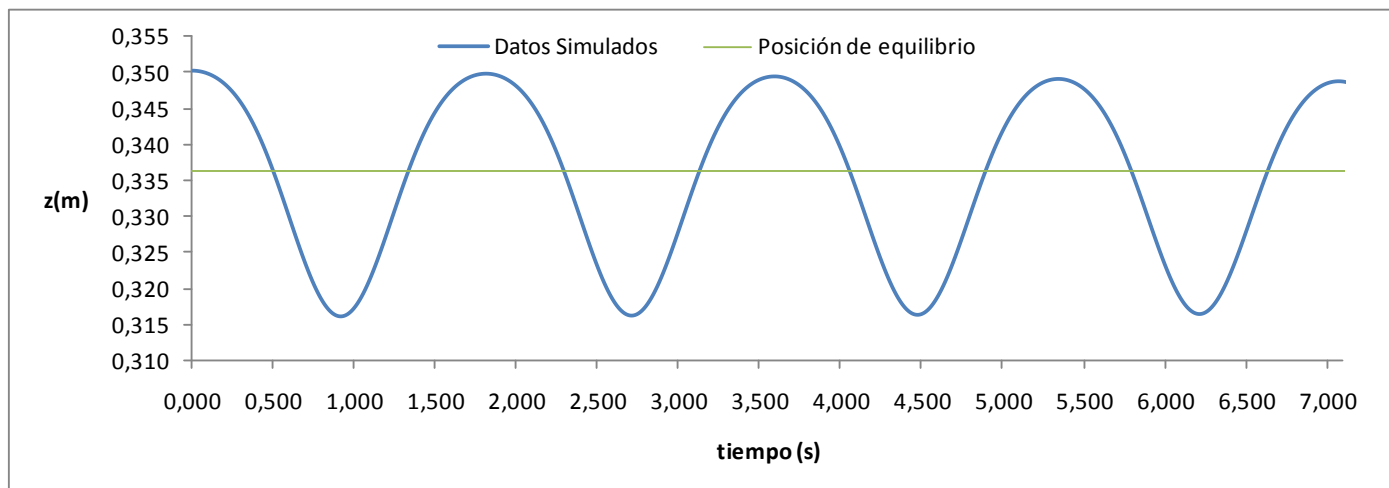


Figura 7. Gráfica de la posición de la pesa en función del tiempo.

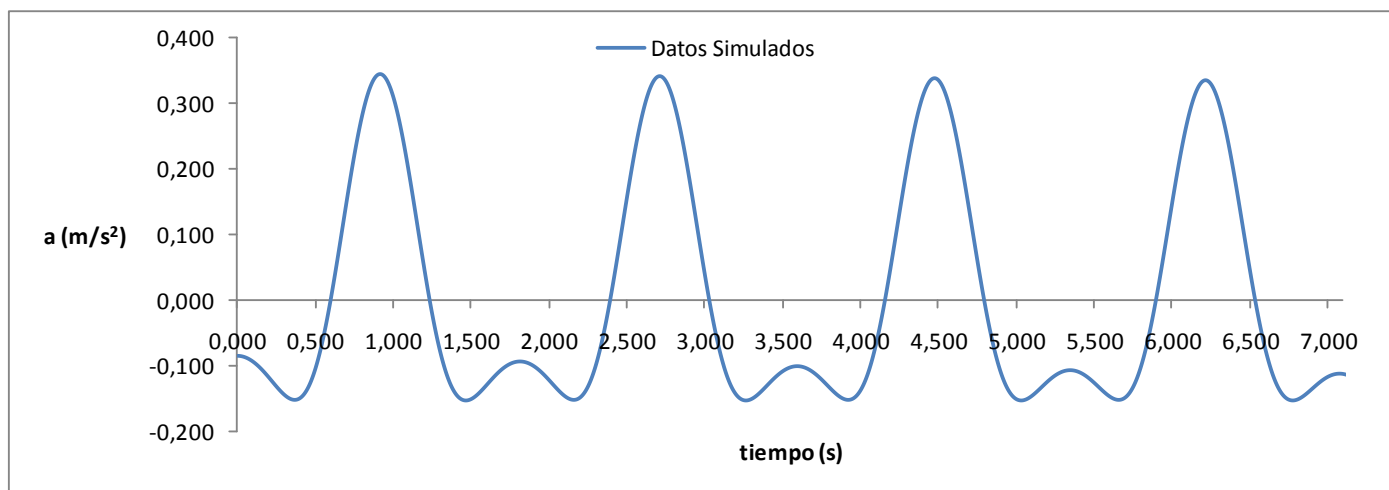


Figura 8. Gráfica de la aceleración de la pesa en función del tiempo.

Cabe señalar que a partir del análisis de la simulación numérica, encontramos que una muy pequeña variación en los valores de cualquiera de los parámetros, lleva consigo una gran variación en las características de la aceleración y de la posición de la pesa en función del tiempo. Esto es consecuencia del carácter no lineal del sistema.

<sup>11</sup> Buzzo Ricardo . *Estrategia EE (Excel-Euler) en la enseñanza de la Física*. Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol 1, No. 1, Sept. 2007

A partir del análisis de los gráficos 7 y 8 se desprenden las siguientes características del sistema:

- a) *El movimiento es oscilatorio.* Este hecho se da porque a partir del instante que se suelta la pesa, la fuerza neta y la aceleración son siempre restitutivas. Cabe señalar que si la posición inicial de la pesa cuando se suelta, fuera tal que  $F_B + P > F_E$ , el movimiento pasa de ser oscilatorio a aumentar la posición de la pesa con el tiempo.
- b) i. *El tiempo que tarda la pesa en ir desde la posición más cercana a los imanes hasta la posición de equilibrio es mayor que el que tarda en ir desde la posición de equilibrio a la posición más alejada de los imanes.*  
 ii. *La distancia entre la posición de la pesa más cercana a los imanes y la posición de equilibrio es menor que la distancia entre la posición de equilibrio y la posición de la pesa más alejada de los imanes.*
- c) *El período de oscilación del sistema es mayor que el que poseería en ausencia de la fuerza magnética.*
- d) *El período de oscilación del sistema depende de la amplitud del movimiento.*
- e) *En la zona del movimiento de la pesa entre la posición de equilibrio y la posición donde se encuentra más cerca de los imanes, la aceleración presenta 3 cambios de concavidad.*

Los puntos b, c, d y e se deben a las características de la fuerza magnética.

## **2. Análisis energético del sistema a partir de la ecuación de movimiento y de su solución numérica.**

A continuación realizaremos un análisis de las energías en juego en el sistema y su evolución con el tiempo en un ciclo. No tomaremos en cuenta la fuerza disipativa, por lo que supondremos que la energía del sistema permanece constante.<sup>12</sup>

$$E = U + K = cte \quad (16)$$

La energía potencial del sistema está compuesta por tres términos: la energía potencial elástica, la energía potencial gravitatoria y la energía potencial magnética, mientras que la energía cinética tiene un solo término, la energía cinética de traslación de la pesa.

Para encontrar una expresión de cada energía potencial, calcularemos previamente sus variaciones entre la posición donde se suelta la pesa ( $z_0$ ) y una posición  $z$  arbitraria.

Las variaciones de energía potencial están dadas por:

$$\Delta U_b = - \int_{z_0}^z \vec{F}_B \cdot \vec{dz} = \frac{A}{n+1} \left[ (L-h-z)^{n+1} - (L-h-z_0)^{n+1} \right] \quad (17)$$

$$\Delta U_g = - \int_{z_0}^z \vec{P} \cdot \vec{dz} = -mg(z - z_0) \quad (18)$$

<sup>12</sup> En el Anexo 2 se realiza un estudio de cómo varía la energía del sistema con el tiempo.

$$\Delta U_e = - \int_{z_0}^z \vec{F}_E \cdot d\vec{z} = K \left[ \frac{(z^2 - z_0^2)}{2} - l_0(z - z_0) \right] \quad (19)$$

Considerando  $U_b(z_0) = 0$ ,  $U_g(z_0) = 0$  y  $U_e(z_0) = 0,100J$ , la energía potencial en función de  $z$  está dada por:

$$U(z) = \frac{A}{n+1} \left[ (L-h-z)^{n+1} - (L-h-z_0)^{n+1} \right] - mg(z-z_0) + K \left[ \frac{(z^2 - z_0^2)}{2} - l_0(z - z_0) \right] + 0,100 \quad (20)$$

En los gráficos 9 y 10 se representa la energía potencial del sistema en función de  $z$ .

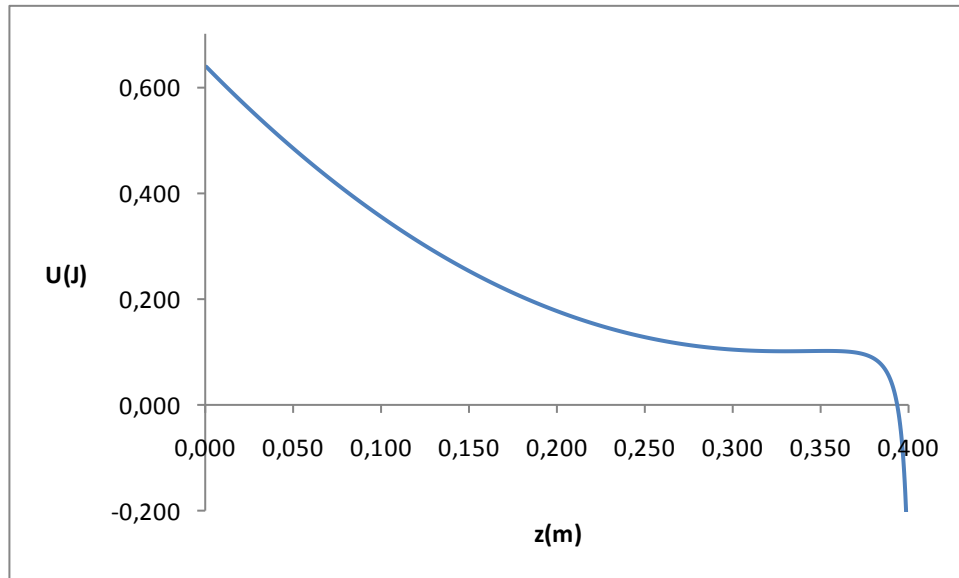


Figura 9. Gráfica de la energía potencial en función de  $z$  entre  $z=0$  y  $z=0,400m$ .

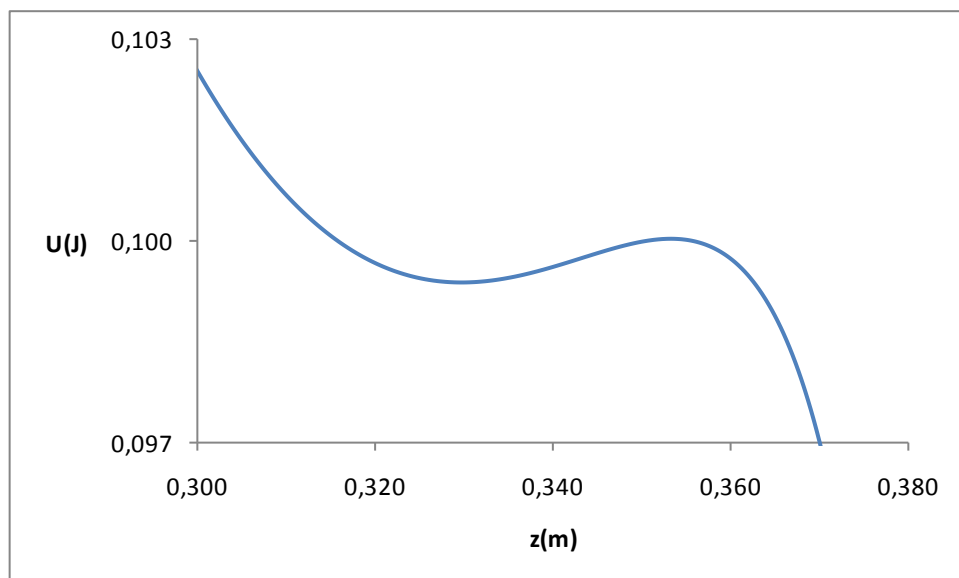


Figura 10. Gráfica de la energía potencial en función de  $z$  entre  $z=0,300m$  y  $z=0,380m$ .

El gráfico de la figura 10 muestra la energía potencial como función de la posición en forma más detallada. El sistema posee dos posiciones de equilibrio, una estable y otra inestable.

En la posición de equilibrio inestable, un pequeño aumento en el valor de  $z$  tiene como efecto que la pesa caiga abruptamente sobre los imanes de barra. Por otra parte si la pesa se encuentra en las proximidades de la posición de equilibrio estable, oscila en torno a la misma.

Si a la expresión de la energía potencial del sistema le sumamos la energía cinética de la pesa, obtenemos la energía total.

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{A}{n+1} \left[ (L-h-z)^{n+1} - (L-h-z_0)^{n+1} \right] - mg(z-z_0) + K \left[ \frac{(z^2-z_0^2)}{2} - l_0(z-z_0) \right] + 0,100 = cte \quad (21)$$

En el gráfico de la figura 11 se representan las energías en función del tiempo, las cuales se pudieron obtener a partir de los valores de la posición y de la velocidad de la pesa determinados numéricamente.

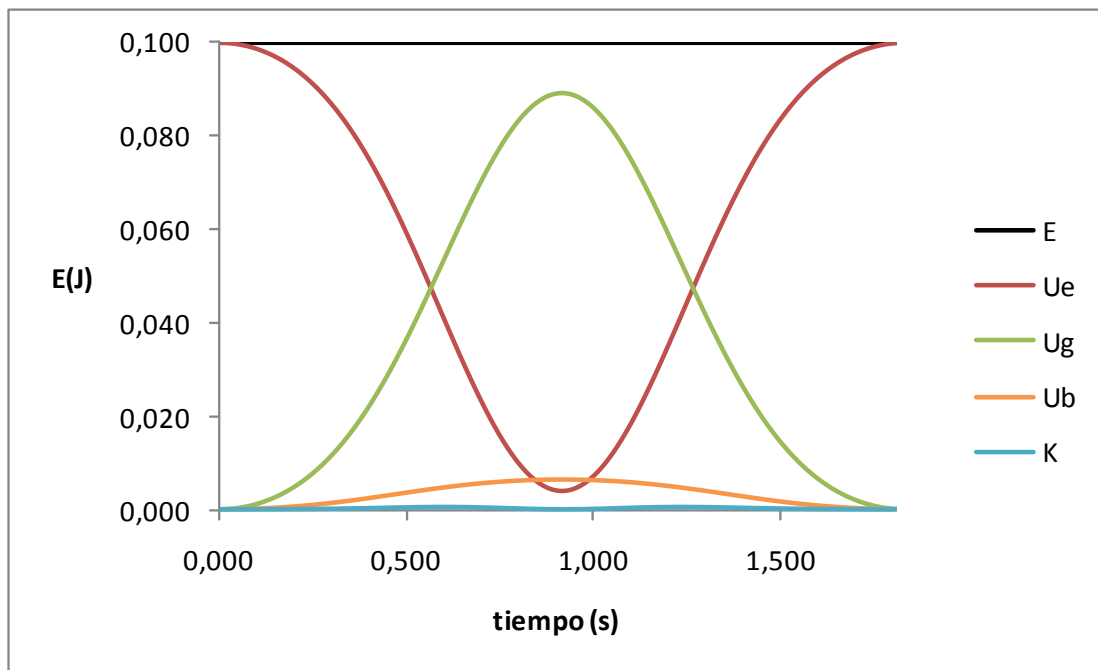


Figura 11. Gráfica de las energías del sistema en función del tiempo.

Del análisis del gráfico de las energías en función del tiempo, se pueden destacar los siguientes puntos:

- Las energías potenciales elástica y gravitatoria máximas son un orden de magnitud mayor que la energía potencial magnética máxima.
- La energía potencial magnética máxima es un orden de magnitud mayor que la energía cinética máxima.
- En la posición donde la pesa está más cerca de los imanes la energía potencial elástica es máxima, mientras que las potenciales magnética y gravitatoria son mínimas.
- A medida que la pesa se aleja de los imanes, acercándose a la posición de equilibrio, aumentan la energía cinética y las potenciales magnética y gravitatoria, a costas de una disminución de la energía potencial elástica.
- Cuando la pesa pasa por la posición de equilibrio la energía cinética es máxima.
- Cuando la pesa supera la posición de equilibrio las energías potenciales magnética y gravitatoria siguen aumentando a costas de una disminución de las energías potencial elástica y cinética.

## RESULTADOS EXPERIMENTALES

### 1. Movimiento del sistema.

Las gráficas de la figura 12 permiten comparar los resultados experimentales de la posición del sistema en función del tiempo con los datos simulados. Como se puede apreciar, el ajuste de los valores experimentales al modelo es más que satisfactorio.

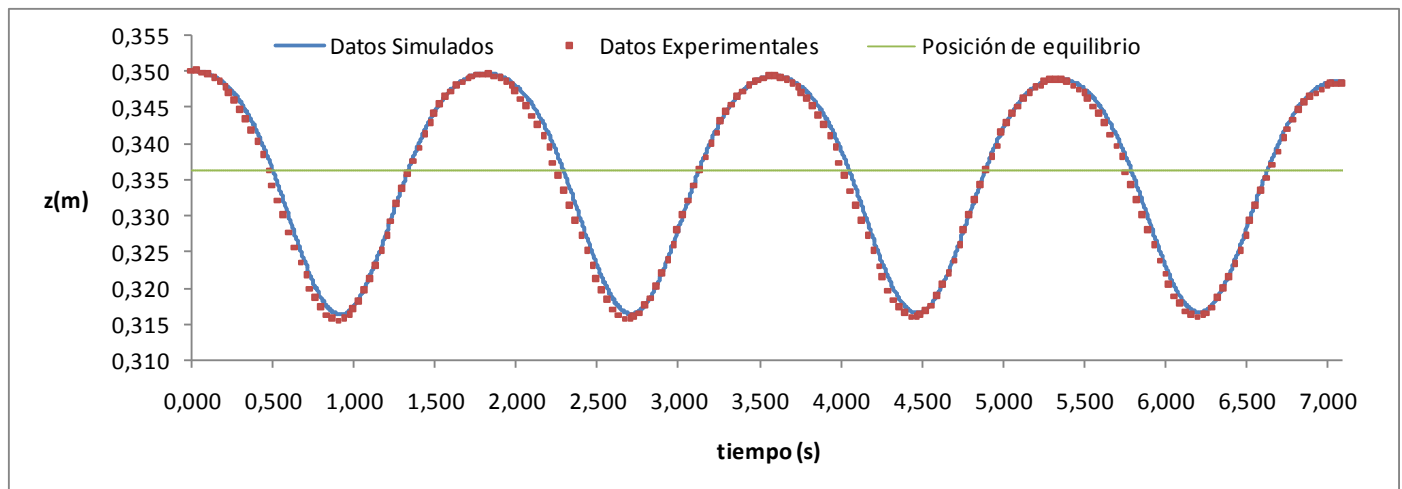


Figura 12. Gráficas de las posiciones teórica y experimental de la pesa en función del tiempo.

En las gráficas de la figura 13 se puede observar que las predicciones del modelo acerca de la aceleración del sistema son exitosas a la luz de los resultados experimentales.

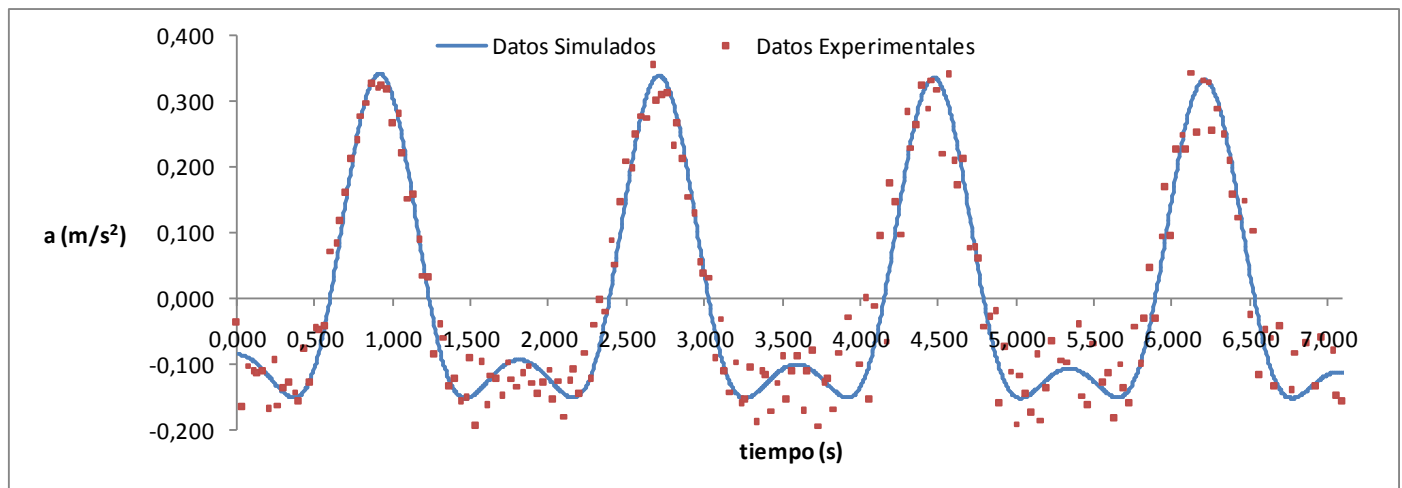


Figura 13. Gráficas de las aceleraciones teórica y experimental de la pesa en función del tiempo.

### 2. Conservación de la energía

Para verificar el poder predictivo de la descripción energética del sistema, calculamos todas las energías a partir de los datos experimentales.

En el gráfico de la figura 14 se comparan los resultados obtenidos experimentalmente con la simulación teórica.

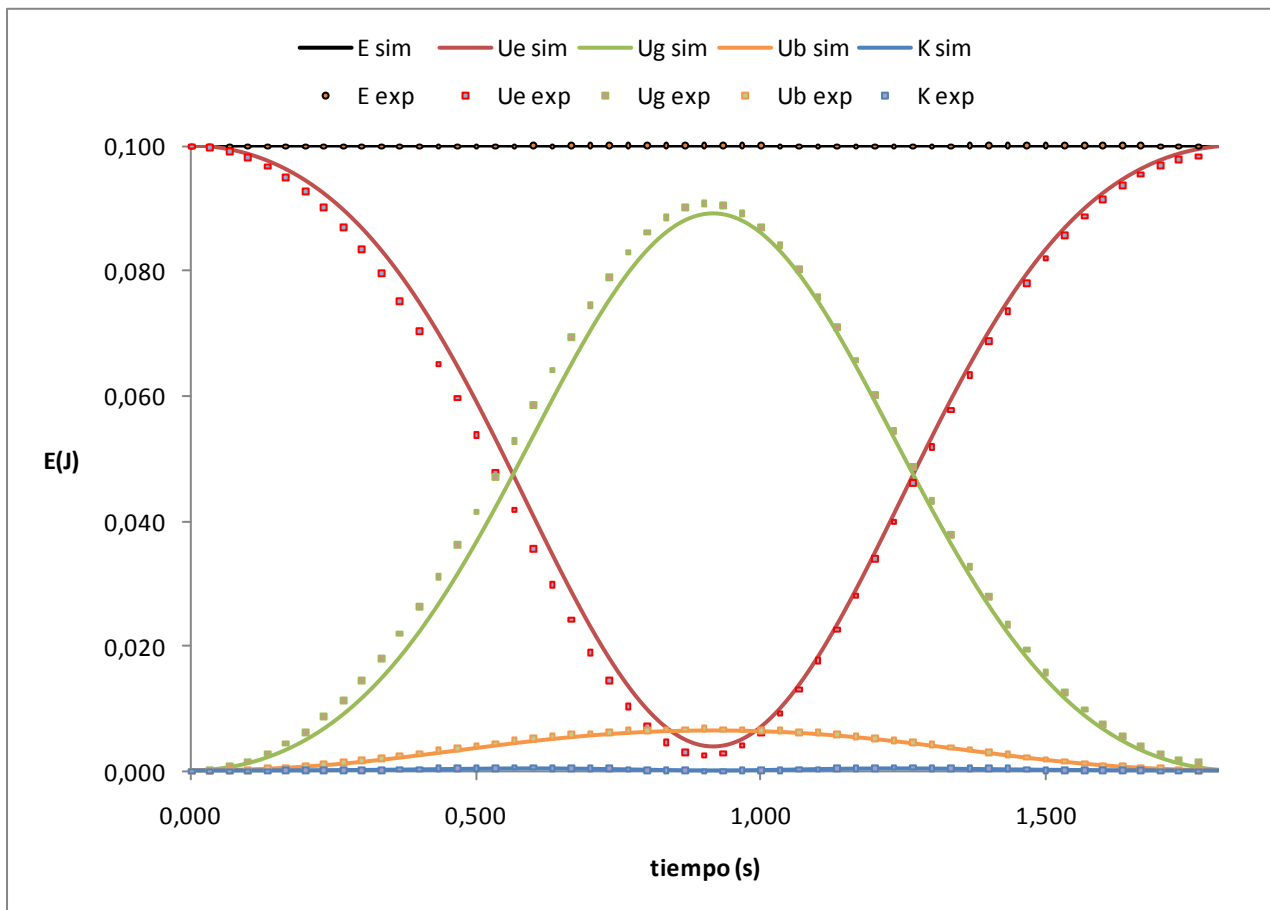


Figura 14. Gráficas de las energías teóricas y experimentales del sistema en función del tiempo.

Al comparar el gráfico teórico con el experimental, se observa cómo los datos experimentales se ajustan notablemente a las predicciones teóricas para dos ciclos.

Dado que la energía cinética máxima es mucho menor que la energía total del sistema, esta representación no permite analizar como disminuye la energía total del sistema, observándose que la energía total del sistema permanece constante.

### **PROYECCIONES, NUEVOS CAMINOS PARA EXPLORAR**

La investigación realizada genera un abanico de posibilidades para desarrollar y profundizar a futuro. Entre ellas destacamos las siguientes:

- a) *Forzar el sistema.* El hecho que el sistema sea no lineal, sugiere que al realizar un estudio exhaustivo de las oscilaciones forzadas y de la curva de resonancia del sistema, sus características serán completamente diferentes a las del oscilador armónico forzado. También existe la posibilidad que el sistema forzado tenga un comportamiento caótico, ya que es una característica que comparten muchos osciladores forzados no lineales.

- b) *Aumentar el coeficiente de viscosidad del sistema.* De esta forma se podrían hacer más visibles los efectos del amortiguamiento. A su vez, se podrían llegar a estudiar los casos de amortiguamiento crítico y sobreamortiguado.
- c) *Estudiar el movimiento en un entorno que comprenda la posición de equilibrio inestable.*
- d) *Estudiar la fuerza magnética y el movimiento de la pesa para otras configuraciones de imanes.* Al determinar la expresión de la fuerza magnética en función de la posición, encontramos que un pequeño cambio en la disposición de los imanes, modificaba notablemente las características de la fuerza magnética.

## **ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE NUESTRO TRABAJO**

Como todo trabajo de investigación, a medida que fuimos realizando el desarrollo experimental y analizando los datos obtenidos, nos encontramos con problemas y resultados a priori impensados para nosotros, los cuales nos fueron generando una serie de desafíos que debíamos superar. Este tipo de situaciones, las cuales son completamente nuevas para nosotros, dado el tipo de formación “clásica” que hemos recibido, nos han resultado de sobremano estimulantes y nos han abierto otra perspectiva de cómo se puede trabajar en una pequeña investigación.

A continuación realizamos una breve reseña de algunos de los problemas y resultados que fueron desafiantes para nosotros a medida que desarrollábamos nuestro trabajo:

- a) Cuando comenzamos a diseñar el sistema de imanes y pesas, el movimiento de la pesa era completamente inestable, observándose oscilaciones pendulares acopladas a las longitudinales.
- b) Para un tipo particular de agarre del resorte al soporte, observábamos oscilaciones de rotación que amortiguaban rápidamente las oscilaciones longitudinales, lo que no nos permitía estudiar el sistema de nuestro interés.
- c) Como no contábamos con información alguna sobre un experimento similar, desconocíamos de qué manera convenía colocar los imanes para poder observar un movimiento cuyo comportamiento difiriera notoriamente del armónico simple. Fue necesario probar colocando los imanes en distintas posiciones y con configuraciones de repulsión y de atracción.
- d) Cuando quisimos encontrar la expresión que describe la fuerza magnética como función de la posición intentamos utilizar el sensor de fuerza del “Logger Pro”. Sin embargo, el “ruido” de la señal obtenida con el mismo impedía sacar conclusiones fidedignas sobre las características de la fuerza. Esto nos obligó a idear otro sistema de medida.
- e) Cuando comenzamos a modelar teóricamente el sistema, supusimos a priori para simplificar el análisis que las fuerzas disipativas eran despreciables. Al contrastar el modelo con los datos experimentales, encontramos que después de algunos ciclos, los datos experimentales se alejaban notablemente de los teóricos. Al comienzo esto nos generó una gran confusión y no encontrábamos a qué se debía este fenómeno. Pudimos comprender lo que ocurría cuando observamos que el período de oscilación del sistema dependía de la amplitud, por lo que inevitablemente debíamos tener en cuenta el amortiguamiento en nuestro análisis teórico.
- f) Cuando graficamos los datos simulados de la aceleración en función del tiempo y observamos la presencia de tres cambios de concavidad en medio ciclo, nuestra primer reacción fue buscar un error en el cálculo numérico, ya que no habíamos considerado la presencia de dicho fenómeno.



- g) Cuando estudiábamos cómo variaba la fuerza magnética con la posición, encontramos que para una posición dada a una distancia fija, la magnetización de la pesa y por ende la fuerza, experimentaban un muy leve aumento con el tiempo. Al evaluar dicho fenómeno concluimos que era despreciable.

Por último, este trabajo de investigación nos ha servido como guía y nos ha dado parte de la experiencia que uno debe vivenciar, para posteriormente poder aplicar pequeñas actividades de investigación en nuestros cursos experimentales.

## **BIBLIOGRAFÍA**

Alvarado y Stern. *Un complemento al teorema de Nyquist*. En: Rev. Mex. Fis. E 56 (2) (2010) pp. 165–171.

Buzzo, R. *Estrategia EE (Excel-Euler) en la enseñanza de la Física*. En: Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 1, No. 1, Sept. 2007.

French, A. P. *Vibraciones y ondas*. Ed. Reverté. Barcelona, 1974.

García Barros, Martínez Losada y Mondelo Alonso. *El trabajo práctico. Una intervención en para la formación de profesores*. En Enseñanza de las Ciencias, 1995, 13 (2), 203-209.

Gil Pérez, Macedo, Martínez Torregrosa, Sifredo, Valdés y Vilches (editores). *¿Cómo promover el interés por la cultura científica?* OREALC/UNESCO. Santiago, 2005.

Marion, J.B. *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*. Ed. Reverté. Barcelona, 1989.

Tarciso Borges, A. *Novos rumos para o laboratório escolar de ciencias*. En Caderno Brasileiro de Ensino de Física, 19, 3, 291-313, 2002.

## **ANEXO 1: REGISTRO DEL MOVIMIENTO DEL SISTEMA A PARTIR DE LA FILMACIÓN**

Para realizar la filmación se empleó una cámara *Canon SD750* que registra 30 cuadros por segundo con una resolución de 640 x 480. El archivo de video obtenido se procesó con la versión 4.00 del programa "Tracker"<sup>13</sup>. Para realizar la filmación se tomaron en cuenta las consideraciones que a continuación se enumeran:

- ***Cámara de video:***

La cámara de video se ubicó en un trípode, de forma tal que la cámara se encontrara fija y horizontal. Se empleó un objetivo "normal" para minimizar las distorsiones introducidas por las lentes de la cámara.

- ***Escala:***

Se ubicó una regla al lado del sistema que fue tomada como referencia para configurar la escala en el programa. Se tuvo especial precaución en que el plano determinado por la regla y el sistema fuera paralelo al objetivo de la cámara.

- ***Iluminación:***

Las filmaciones fueron realizadas con iluminación natural, en el momento del día en que el recinto donde se efectuaron se encontraba con la máxima luminosidad. Por otra parte, se empleó un fondo de color blanco. De esta forma se logró reducir el tiempo de exposición de cada fotograma, aumentando notablemente la nitidez de las imágenes.

- ***"Tracking" automático:***

El software utilizado permite determinar automáticamente la posición de un cuerpo en cada uno de los fotogramas del video. Para emplear esta función le adherimos a la pesa una figura que pudiera ser reconocida con la mayor rapidez y precisión posible.

---

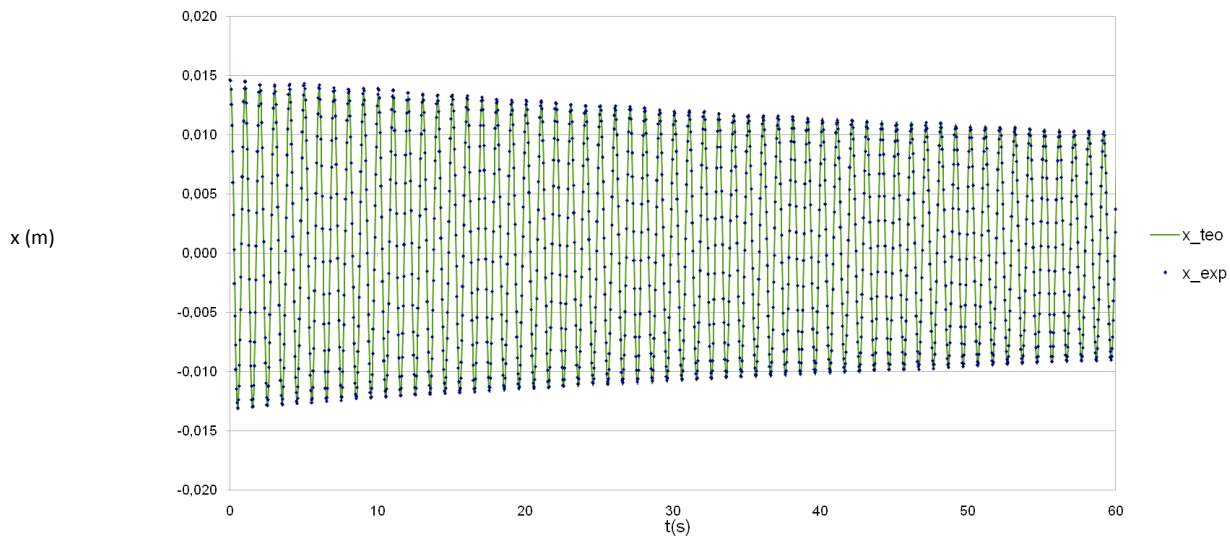
<sup>13</sup> Disponible en <http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/> bajo licencia GNU.

## ANEXO 2: ESTUDIO DE LA DISIPACIÓN DE LA ENERGÍA DEL SISTEMA

Para determinar las características de la disipación de la energía del sistema estudiamos el movimiento del sistema sin los imanes de barra de la base. En estas condiciones, verificamos que se trata de un oscilador armónico subamortiguado cuya ley horaria es:

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \delta) \cdot e^{-\beta t}$$

Mediante la función Solver de Excel determinamos los parámetros de la ecuación anterior, observando un excelente ajuste con los datos experimentales:



Para determinar si es significativa o no la disipación de energía debido a las corrientes inducidas, decidimos hacer un análisis más exhaustivo de la variación de la energía total del sistema. Para ello comparamos los valores experimentales de la variación de la energía con los previstos teóricamente para el movimiento armónico subamortiguado.

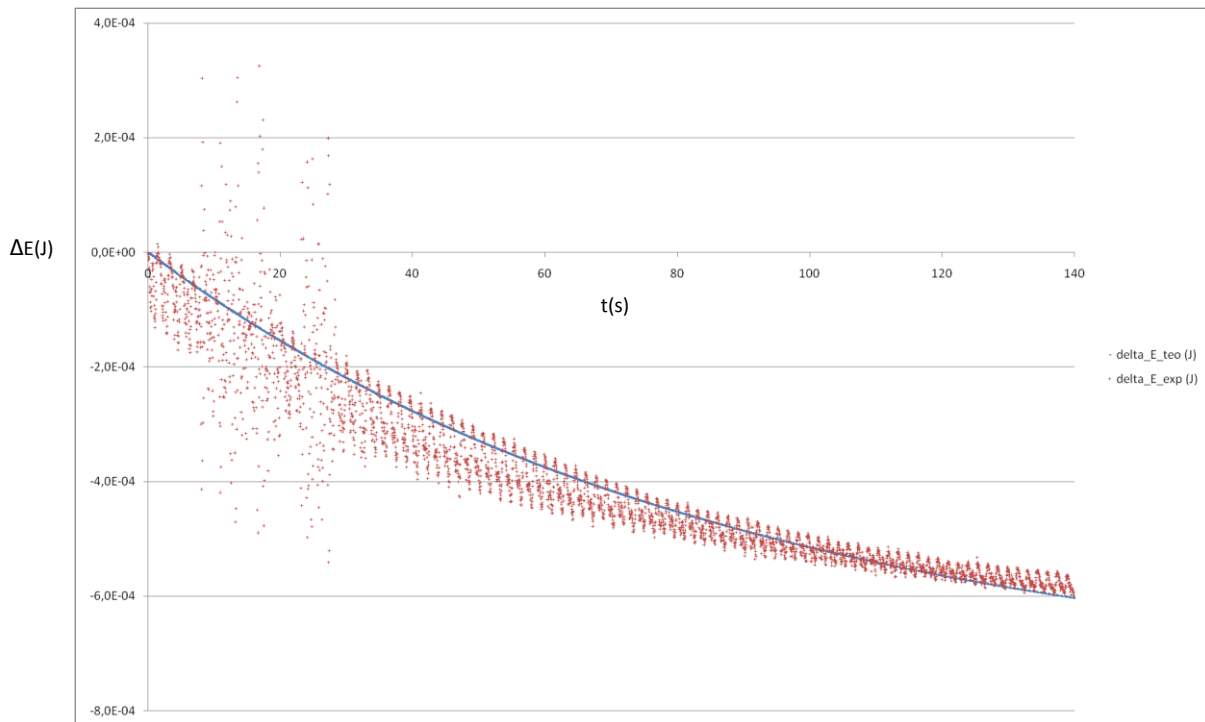
En un sistema armónico subamortiguado, la energía total del sistema está dada por la siguiente ecuación:

$$E(t) = E_0 \cdot e^{-2\beta t}$$

Por lo que la diferencia entre la energía del sistema en un instante  $t$  y la energía inicial  $E_0$  es:

$$\Delta E(t) = E_0 \cdot (1 - e^{-2\beta t})$$

La siguiente gráfica permite comparar la disminución de la energía prevista por la ecuación anterior con la determinada experimentalmente:



Si bien a partir de los valores experimentales no podemos aseverar que el único factor de disipación de la energía es el amortiguamiento viscoso, sí podemos afirmar que es el principal.

Por último, introducimos el coeficiente de amortiguamiento determinado en el experimento anterior en nuestro modelo y observamos un ajuste notable con los datos experimentales.

Por todo lo visto anteriormente mantuvimos nuestra hipótesis inicial de que la única fuerza no conservativa significativa es la del amortiguamiento viscoso.